SEKUNDPENDULET

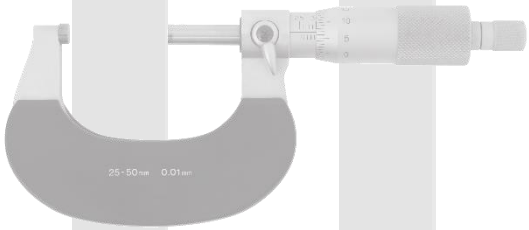
ØVELSE I PRAKTISK METROLOGI

UNDERVISNINGSELEMENT

#06

—

UNDERVISNING
I MÅLETEKNIK

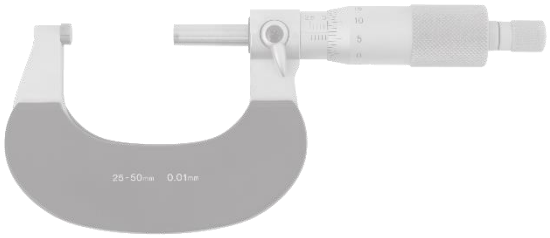


metrologi.dk

SEKUNDPENDULET

Jacob Larsen, DFM A/S

1. udgave – Marts 2020



Copyright © 2020 metrologi.dk – Materialet må ikke anvendes til kommercielt brug, uden tilladelse fra metrologi.dk.

Metrologi.dk er finansieret af Styrelsen for Forskning og Innovation i perioden 2016 – 2020. Materiale er udarbejdet i et samarbejde mellem GTS-institutterne DFM A/S, FORCE Technology og DELTA - a part of FORCE Technology.
Læs mere om projektet på www.metrologi.dk.
Parterne i Metrologi.dk kan ikke gøres ansvarlig for fejl og mangler i indholdet af undervisnings materialet eller i indholdet på websitet, samt indholdet i de eksterne dokumenter og websites, der linkes til, medmindre andet følger af dansk rets almindelige regler.

Grafisk design af: Henriette Schäfer Høyrup og David Balslev-Harder.

Indholdsfortegnelse

1 Formål 1
2 Forsøgskomponenter 1
3 Baggrund 1
4 Fremgangsmåde og dataindsamling 2
5 Databehandling 2
6 Usikkerhedsbudget 4

1 Formål

Målet med denne øvelse er at bygge og kalibrere et ur som kan bruges til at bestemme et sekund og sammenligne denne måling med et sporbart ur.

Gennemførelse af øvelsen bør resultere i

- kendskab til den matematiske model der beskriver svingningstiden for et matematisk pendul.
- Kendskab til basal databehandling og logaritmisk regression i Excel.
- basalt kendskab til hvordan et usikkerhedbudget opstilles og ...

Forsøget udføres i grupper af 2-3.

2 Forsøgskomponenter

Til øvelsen vil der være brug for følgende:

- Et lod.
- Snore af forskellige længder.
- En tommestok.
- Et stopur.

3 Baggrund

Den danske astronom Tycho Brahe, grundlagde den moderne naturvidenskabelige metode med sine ekstremt præcise observationer af stjernerne og han var en af de første, der behandlede usikkerheder i sine målinger seriøst. Et af de helt store problemer i astronomi på Tycho Brahes tid var at udmåle tid på en præcis måde. Der fandtes ure, men de var ikke tilstrækkeligt præcise til de målinger Tycho Brahe lavede, hvilket også var et problem i navigations til søs.

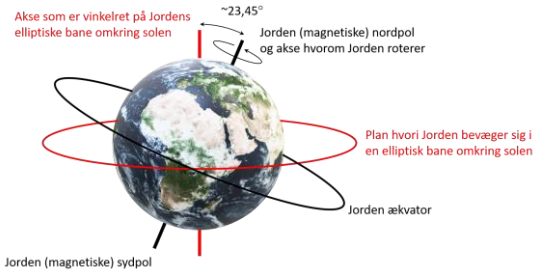
En af de mulige løsninger, var det pendulur, der blev foreslået af den hollandske fysiker Christian Huygens (figur 2) i 1673 og efterfølgende bragt til Danmark af Ole Rømer, desværre først efter Tycho Brahes død. Ole Rømer beskrev selvsikkert usikkerheden af sine pendulure således "at de på 24 timer knap narrer den observerende et halvt sekund"

I dette forsøg skal I undersøge, hvordan man kan lave et pendulur der udmåler ét sekund på en halv svingning og lave det tilhørende usikkerhedsnudget.

Boks 1: Tidsmålinger før år 1600

I oldtiden Egypten og Babylon brugte man fra omkring år 1500 før vores tidsregning solens bevægelse på himlen til at udmåle tid. Det såkaldte solur bestod typisk af en plan 'urskive' hvor der var udmålt et antal buevinkler til at repræsenterer døgnets timer og en central søjle til at kaste skygge på urskiven. Man kaldte det *sand soltid* når solen stod højest på himlen kl. 12 for dette ændrer sig kun op til 20 sekunder fra dag til dag, men for at kunne sammenligne solens position fra dag til dag var det nødvendigt at sådan et solur stod på præcis samme placering hele tiden.

Soluret i den form det havde i oldtiden havde derfor en række udfordringer både i forhold til nøjagtighed og anvendelse. Jordens døgnrytme er et kompliceret resultat af jordens elliptiske bane omkring solen og Jorden rotation om sin egen akse (se figuren herunder), derfor er dagene og dermed timerne målt med et solur af varierende længde. Et andet problem var at soluret var at det ikke rigtig kunne bruges til søs, hvor behovet for præcise tidsmålinger var stort til navigation, fordi skibe bevæger sig i forhold til solen.



Figur 1: Jorden

Et pendul bygges med et lod og en snor. Pendulet hænges op så det kan svinge uden forhindringer og så er er mulighed for at ændre på snorens længe undervejs i forsøget.

Figur 2: Christiaan Huygens.

Figur 4: Ole Rømer.

Figur 3: Tycho Brahes.

4 Fremgangsmåde og dataindsamling

I første omgang skal man undersøge hvilken indflydelse snorens længde har på pendulets svingningstid. De fundne måleresultater indføres løbende resultatskemaet på side 3 eller direkte i Excel. Snorens længde indføres i de grå felter.

For at få en nogenlunde præcis bestemmelse af svingningstiden for pendulet skal tidsmålingen foretages for 10 svingninger. Med **en svingning** menes at **pendulet bevæger sig fra det ene yderpunkt til den andet og tilbage igen**. For hver tidsmåling af 10 svingninger udregnes tiden for én svingning med formlen

Ligning 1:

$$t = \frac{\text{tiden for 10 svingninger}}{10}$$

Boks 2: Tidsmålinger efter år 1600

I midten af 1600-tallet opfandt den hollandske fysikker Christiaan Huygens et ur baseret på pendulsvingninger. Der i samtiden var uhørt præcist med en fejl på mindre end 1 minut pr. døgn. Et pendul består af et lod der hænger i en snor og som udfører små svingninger omkring sin ligevægtsposition. Princippet bag penduluret er at svingningstiden for et pendul kun afhænger af længden, L, af snoren. Matematisk modellers dette som

Ligning 2:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ ,$$

hvor g = 9,82 m/s^2 er tyngdeaccelerationen i Danmark. Det siges at ideen om at bruge et pendul som ur oprindeligt blev udtænkt af Galileo Galilei i sin studietid i Pisa, men en fysisk realisering af penduluret blev først gjort i Huygens værksted d. 25. december i 1656. Kort tid senere blev den version, som vi i Danmark kalder bornholmeruret en stor succes bland datidens samfundets bedre stillede. Det skulle gå endnu 80 før briten John Harrison og franskmanden Pierre Le Roy uafhængigt af hinanden skabte et ur der kunne bruges til søs.

Herhjemme blev penduluret indført af Ole Rømer, der videreførte Tycho Brahes arbejde og senere blev berømt for at påvise at lys bevæger sig med en endelig fart og også bestemme denne til 227 000 000 m/s, hvilket er imponerende tæt på den præcise værdi vi kender i dag.

For at få en ide om usikkerheden på tidsmåling skal svingningstiden måles 5 gange for hvert valg af snorlængde.

For hver serie af 5 målinger (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) udregnes middelværdien

Ligning 3:

$$\bar{t} = \frac{t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}{5},$$

Som det ses i kompendium 2A på metrologi.dk beregnes standardafvigelsen ved

Ligning 4:

$$s(t) = \sqrt{\frac{(t_1-\bar{t})^2+(t_2-\bar{t})^2+(t_3-\bar{t})^2+(t_4-\bar{t})^2+(t_5-\bar{t})^2}{5-1}},$$

og standardusikkerheden på middelværdien

Ligning 5:

$$u(\bar{t}) = \frac{s(t)}{\sqrt{5}}.$$

De beregnede middelværdier, standardafvigelser og standardusikkerheder indføres i de gule felter.

#	Længde [m]	Tid for 10 svingninger [s]		Tid for 1 svingning [s]	Middelværdi [s]	Standard-afvigelse [s]	Standardusik-kerhed [s]
1		1					
		2					
		3					
		4					
		5					
2		1					
		2					
		3					
		4					
		5					
3		1					
		2					
		3					
		4					
		5					
4		1					
		2					
		3					
		4					
		5					
5		1					
		2					
		3					
		4					
		5					

5 Databehandling

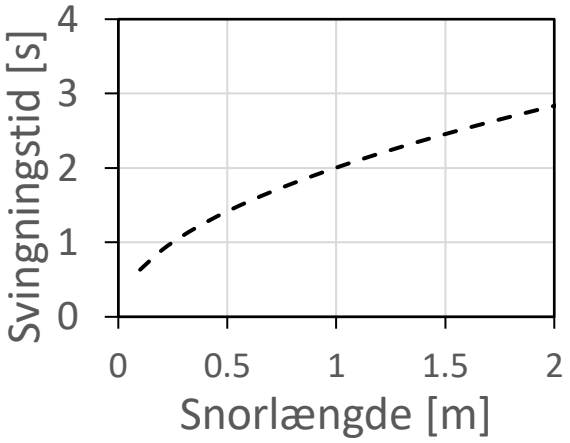
Middelværdierne af tidsbestemmelserne for 1 svingning og de tilhørende værdier af snorens længde indføres i Excel (eller et lignende regneark).

Derfor er det vigtigt at der er mindst en i hver gruppe der har en computer. I Excel skal laves 1) en grafisk afbildning af data og 2) en lineær regression af data så modelparametre kan bestemmes med tilhørende standardusikkerhed. Data kan eksempelvis se sådanne ud i Excel:

Data	
Længde [m]	Tid [s]
x	y
0,80	1,79
1,20	2.20
⋮	⋮

1)

Der skal laves en graf, hvor svingningstiden afbilde mod snorlængden. Svingningstiden skal vises på y-aksen og snorlængden skal vises på x-aksen. En tendenslinje af typen "potensfunktion" altså $y = a \cdot x^b$, tilføjes slutteligt grafen. Man burde få en modelparameter, b, der cirka bliver $\frac{1}{2}$. De målte punkter burde danne en sammenhæng der ligner den der ses på figur 5.



Figur 5: Sammenhæng mellem snorlængde og svingningstiden for et pendul.

Boks 3: Universaltid (UTC) og loven om dansk tid

Grundet jordens rotation, står solen højest på himlen til forskellige tidspunkter, langs de forskellige områder af jorden der skiftevis peger mod solen og man må derfor inddele jorden i tidszoner, således at alle oplever døgnet tidspunkter (nogenlunde) ens.

Ved en international konference der blev afholdt i Washington i 1884 besluttedes det at inddele jordkloden i 25 tidszoner med udgangspunkt i nulmeridianen der går gennem Observatoriet i Greenwich-bydelen i London. Klokkeslættet i Greenwich kaldes for koordineret universal-tid (*Coordinated Universal Time*) eller UTC. Hver tidszones *normaltid* udregnes ved at man for hver 15° man rejser østpå fra nulmeridianen lægger 1 time til tidspunktet. Hvis man derimod rejser 15° vestpå, trækkes 1 time fra tidspunktet.

Danmark ligger i den først tidszone øst for Greenwich, og derfor udregnes klokkeslættet i Danmark som UTC+1. Faktisk går den 15° østlige længdegrad relativ til Greenwich igennem Bornholm, knapt 2 kilometer fra Gudhjem, som derfor også er centrum for dansk udmåling af tid, også den dag i dag. Da Danmark officielt d. 1 januar i 1894 tilslutter sig UTC sker det gennem "Lov om Tidens Bestemmelse" som underskrives af Kong Christian den niende og hvori der blot står;

§1

For alle Dele af Landet med Undtagelse af Færøerne skal Tiden herefter bestemmes lige med Middelsoltiden for den 15de Længdegrad Øst for Greenwich.

§2

Denne Lov træder i Kraft den 1ste Januar 1894.

Hvorefter alle vedkommende sig have at rette.

Givet paa Amalienborg, den 29de Marts 1893.

Under Vor Kongelige Haand og Segl.

Christian Rex

Arbejdsspørgsmål til kursisterne om 1):

Hvis pendulet skal kunne bruges som ur, skal man helst kunne oversætte en svingning til et helt antal sekunder.

- Hvilket bud kan man, ud fra figuren, give i forhold til hvilket værdi pendulets snor bør have hvis det skal kunne bruges som ur?
- Hvilke eksperimentelle forhold kunne tænkes at have indflydelse på hvor præcist et ud man kan fremstille på denne måde?

2)

I metrologi skal vi både kunne kvantificere de fysiske størrelser der optræder som parametre i naturvidenskabens modeller og kunne kvantificere den til hver parameter hørende usikkerheden. Dette gøres typisk gennem statistisk databehandling af en række sammenhørende målinger. Inspireret af ligning 2 ved et den korrekte model som de, i dette forsøg, målte sammenhængende værdier af snorlængde og svingningstid, en potensfunktion

Ligning 6:

$$t = a \cdot x^b,$$

og ifølge den simple teori burde $a = 2{,}005$ og $b = 0{,}500$. Det er dog usandsynligt at nogle ville få præcist den værdi ud fra 5 målepunkter. Forskellen skulle gerne afspejles i usikkerheden på modelparametrene, og for at undersøge dette skal der laves en lineær regression over data. Lineær regression er beskrevet i kompendium 2A på metrologi.dk. Dog skal man her være opmærksom på at data kun danner en lineær sammenhæng i en log-log graf. Hvis man eksempelvis tager 10-tals logaritmen på begge sider af en potensfunktion får man

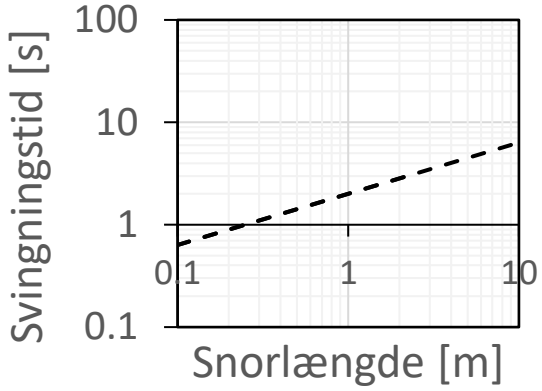
Ligning 7:

$$\log_{10}(t) = \log_{10}(a \cdot x^b) = \log_{10}(a) + b \cdot \log_{10}(x)\,.$$

For at gøre det lidt mere overskueligt kan vi give $\log_{10}(a)$ navnet A. Så står der

$$\log_{10}(t) = A + b \cdot \log_{10}(x)$$

hvilket betyder at data i en log-log graf vil danne en ret linje hvor hældningen er modelparameteren b og skæringspunktet er A. Et eksempel på denne sammenhæng ses på figur 6.



Figur 6: Sammenhæng mellem snorlængde og svingningstiden for et pendul i en log-log graf.

Excel har en funktion til at lave lineær regression der hedder LINREG som også kan bruges i dette tilfælde. På side 6 ses en guide i hvordan man udfører en lineær regression i en log-log-graf. Et eksempel på hvordan resultatet af regressionsanalysen kan se ud ses i tabel 1.

	b, A	0,5143	0,3031	
	u(b), u(A)	0,0096	0,0034	
	R2, u(y)	0,9945	0,0138	
	F, degfree	2880,3190	16	
	Ss-reg, Ss-resid	0,5454	0,0030	

Tabel 1: Resultat af en lineær regression for sammenhængende værdier af snorlængde og svingningstiden for et pendul.

For at finde den oprindelig modelparameter a fra ligning 6 skal vi bruge den omvendte logaritme:

$$a = 10^A$$

I eksemplet får vi $a = 10^{0,3031} = 2,0096$

Givet en snorlængde x, kan svingningstiden således udregnes ved hjælp af ligning 7.

LINREG funktionen i Excel[1]
LINREG benytter mindste kvadraters metode til at beregne konstanterne a og b i den rette linje som bedst passer igennem datapunkterne.

Funktionens inputs: LINREG(LOG10(Kendte_y); LOG10(kendte_x); SAND; SAND)

Fremgangsmåde:
1) Marker så 2 kolonner og 5 rækker et sted i Excel arket hvor der ikke er noget i forvejen.
2) Skriv derefter = LINREG(LOG10("markér dine y ");LOG10("markér dine x ");SAND;SAND)
3) Tryk derefter Ctrl+shift+Enter, derved fyldes alle 2x5 markerede felter ud.
4) Den første række viser værdien af konstanterne b og LOG10(a).
5) Den anden række viser fejlen på hvor godt konstanterne er bestemt, u(b) og u(a).

Omvendt kan den eksakte snorlængde udregnes direkte for et valg af svingningstid. Vælges svingningstiden $t = 2,0000\,\mathrm{s}$ fås ved brug af de, i tabel 1, viste resultater fås

Ligning 8:

$$x = (t/a)^{\left(\frac{1}{b}\right)} = 0,9908\ \mathrm{m}$$

En snorlængde på ca. 1 m bude således give en svingningstid på 2 sekunder.

Arbejdsspørgsmål til kursisterne om 2):

- Ud fra modelparametrene kan den eksakte længde af pendulets snor udregnes (som det er vist på herovre). Hvordan passer dette med aflæsningen gjort i " **Arbejdsspørgsmål til kursisterne om 1)**"?
- Hvilken parameter har den største standardusikkerhed og hvad kunne man gøre for at gøre denne standardusikkerhed mindre?

6 Usikkerhedsbudget

Dette simple pendulur har som øvelse i metrologi den store fordel, at det er nogenlunde overskueligt at sætte usikkerhedsbudget op. Fra den regression der blev udført under databehandlingen kendes modelparametrene med tilhørende standard usikkerheder.

Udover modelparametrene a og b, indgår snorlængden i bestemmelsen af svingningstiden. Svingningstiden (og dermed penduluret) er således en funktion af 3 parametre. Længden af snoren bestemmes typisk med en tommestok med 1 mm som mindste inddeling. Det betyder ifølge en nem tommelfingerregel at længden, x, kan bestemmes med en standardusikkerhed på $u(x)$ = 0,1 mm (1/1000 m).

Som anvist i Kompendium 2A på metrologi.dk kan man bestemme de enkelte parametres usikkerhedsbidrag $u_a(t)^2$, $u_b(t)^2$ og $u_x(t)^2$, ved at beregne hvor meget svingningstiden ændre sig, når disse parametre andres med deres standardusikkerhed. Den samlede usikkerhed for svingningstiden udregnes efterfølgende ved at lægge de enkelte usikkerhedsbidrag sammen i kvadratur

Ligning 11:

$$u(t) = \sqrt{\left(u_a(t)\right)^2 + \left(u_b(t)\right)^2 + \left(u_x(t)\right)^2}\,.$$

[1] Hvis man har engelsk Excel hedder funktionen LINEST og hvis man har dansk Excel hedder den LINREG.

Givet de værdier der ses i tabel 1, får man

$$u_a(t) \quad = +\,0{,}018197$$
$$u_b(t) \quad = -\,0{,}00076$$
$$u_x(t) \quad = +\,0{,}00101$$

og endvidere

$$u(t) = \sqrt{(0{,}018197)^2 + (-\,0{,}00076)^2 + (0{,}00101)^2}$$
$$= 0{,}01824$$

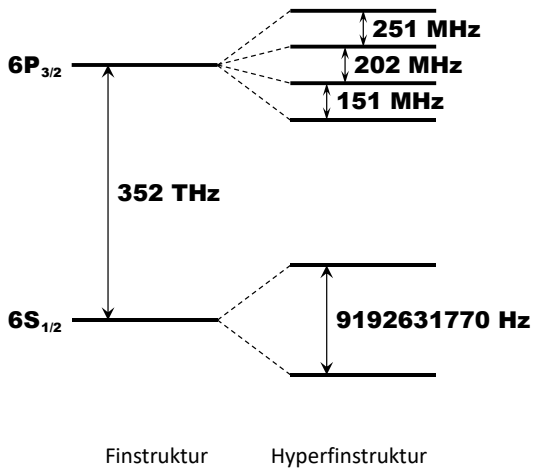
Hvoraf det fremgår at langt den største bidragsyder til standardusikkerheden på svingningstiden kommer fra parameteren a.

Hvis man ikke er bekendt med hvordan et usikkerhedsbudget udregnes, kan man med fordel benytte de skabeloner til usikkerhedsbudgettet der er tilgængelige på metrologi.dk, samlet under kompendium A3.

Boks 4: SI-enheden *sekund*

På Generalkonferencen for mål og vægt (CGPM) i 2018 blev det besluttet at reformere definitionen af alle SI-enhederne. Således også SI-enheden for tid, der som bekendt er sekundet. Den oprindelige definition af sekundet var fastsat således at der var 86400 sekunder på et døgn, men fra d. 20 maj 2019 er sekundet i stedet knyttet til den atomare overgang mellem de hyperfinopsplittede grundtilstande i det uperturberede ^{133}Cs atom.

1 sekund er således den tid det tager at udsende lys fra ^{133}Cs atomet i alt 9192631770 gange. Grundtilstanden og den første exciterede tilstand ses på figur 8.



Figur 8: Energiegentilstandene i ^{133}Cs atomet.