

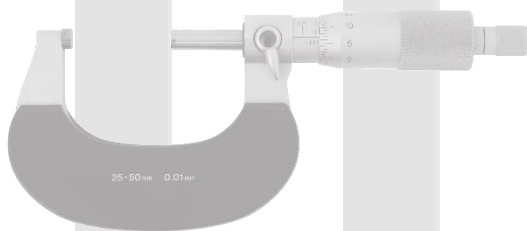
HØJDEMÅLER

ØVELSE I PRAKTISK METROLOGI

UNDERVISNINGSELEMENT

#04

—
UNDERVISNING
I MÅLETEKNIK

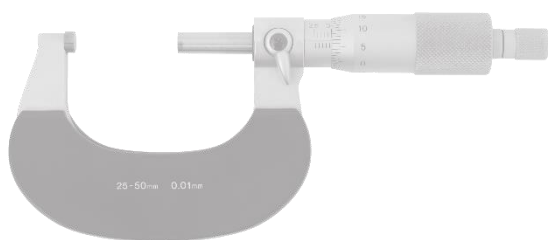


metrologi.dk

HØJDEMÅLER

Jacob Larsen, DFM A/S

1. udgave – August 2020



Copyright © 2020 metrologi.dk – Materialet må ikke anvendes til kommercielt brug, uden tilladelse fra metrologi.dk.

Metrologi.dk er finansieret af Styrelsen for Forskning og Innovation i perioden 2016 – 2020. Materiale er udarbejdet i et samarbejde mellem GTS-institutterne DFM A/S, FORCE Technology og DELTA - a part of FORCE Technology.

Læs mere om projektet på www.metrologi.dk.

Parterne i Metrologi.dk kan ikke gøres ansvarlig for fejl og mangler i indholdet af undervisnings materialet eller i indholdet på websitet, samt indholdet i de eksterne dokumenter og websites, der linkes til, medmindre andet følger af dansk rets almindelige regler.

Grafisk design af: Henriette Schäfer Høyrup og David Balslev-Harder.

Indholdsfortegnelse

1 Formål	1	5 Kode.....	4
2 Forsøgskomponenter.....	1	6 Kalibrering	6
3 Baggrund	1	7 Usikkerhedsbudget	7
4 Konstruktion af trykmåleren.....	4	8 Afrunding	8

1 Formål

Målet med denne øvelse er at bygge og kalibrere en højdemåler.

Gennemførelse af øvelsen bør resultere i

- Fundamentalt kendskab til den matematiske model der beskriver trykændringen op igennem Troposfæren.
- Fundamentalt kendskab til basal databehandling og lineær regression i Excel.
- Fundamentalt kendskab til hvordan et usikkerhedsbudget opstilles.

Forsøget kan udføres i grupper af 2-3 eller solo.

2 Forsøgskomponenter

Til øvelsen vil der være brug for følgende:

- En Arduino.
- Tryksensor, f.eks BMP085 eller BMP180
- En tommestok.

3 Baggrund

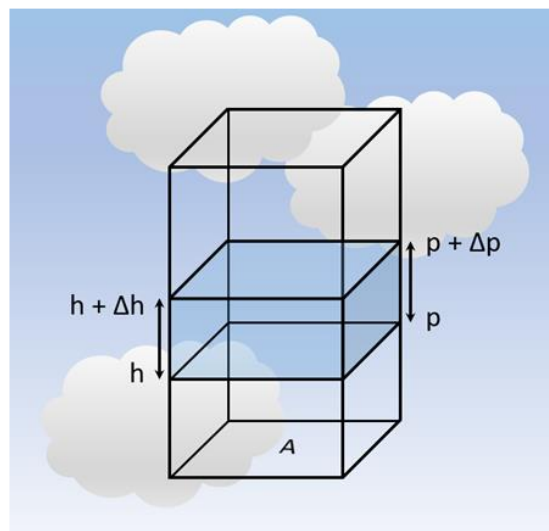
Tryk er resultatet af en kraftpåvirkning fordelt ud over et areal. Derfor mærkes trykket fra en spids høj hæl, der jo har en lille overflade som stort, hvis man bliver trådt over foden, hvorimod en fakir der ligger på et leje af søm har sin tyngdekraft fordelt over mange søm og derfor føles trykket på hver søm som meget lille.

Atmosfæren trykker også ned på os her på jorden. Det mærker vi ikke til hverdag, for vi er vant til det, men det kan bruges til at beregne højde.



Figur 1: Den amerikanske fysiker Edwin Taylor som ligger på en plade med søm.

Det barometriske tryk i atmosfæren er et resultat af tyngdekraften fra den søjle af atmosfærisk luft der er over jordoverfladen fordelt på jordoverfladens areal. Normalt opgøres tryk i enhederne newton per kvadratmeter [N/m^2], dette kaldes også pascal [Pa].



Figur 2: Et volumenudsnit af atmosfæren over en overflade med arealet A.

Formlen for at udregne trykforskellen, Δp , mellem højderne h og $h + \Delta h$ som er højere oppe i atmosfæren end h , er

Ligning 1:

$$\Delta p = \rho g h - \rho g (h + \Delta h) = -\rho g \Delta h,$$

hvor minustegnet betyder at trykket i højden $h + \Delta h$ er mindre end ved h . Det vil sige at man kan beregne sig frem til en relativ højdeforskel ud fra en måling af barometrisk tryk.

Trykvariationen i forhold til højden kan ifølge ligning 1 udtrykkes som

Ligning 2:

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\rho g,$$

og afhænger således kun af tyngdeaccelerationen $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ og atmosfærens massefylde, ρ .

Tør atmosfærisk luft indeholder hovedsageligt Nitrogen (kvælstof) og Oxygen (ilt) samt ædelgassen Argon. Dertil kommer CO₂ (Kultveilte) og andre gasser. Tabel 1 viser de hyppigst forekommende grundstoffer i atmosfæren.

Grundstof		Procentdel [%]	Molarmasse [g/mol]
Nitrogen	N ₂	78,084	28,014
Oxygen	O ₂	20,9476	31,998
Argon	Ar	0,934	39,948
Carbondioxid	CO ₂	0,04	44,009
Neon	Ne	0,00182	20,183
Krypton	Kr	0,000114	83,800
Metan	CH ₄	0,0002	16,043
Helium	He	0,000524	4,002
Dinitrogenoxid	N ₂ O	0,000027	44,013
Xenon	Xe	0,0000087	131,300
Carbonmonooxid	CO	0,000019	28,010
Hydrogen	H ₂	0,00005	2,016

Tabel 1: Sammensætningen af gasser i atmosfæren.

Gasserne i atmosfæren kan med god tilnærmelse opfattes som værende uafhængige af hinanden, forstået på den måde at de kun sjældent møder hinanden og hvis de gør reagerer de ikke kemisk med hinanden. Derfor kan massefylden af tør atmosfærisk luft udtrykkes som

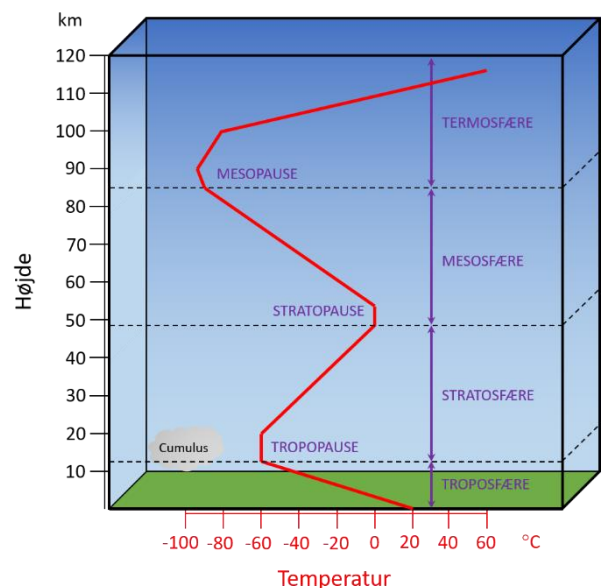
Ligning 3:

$$\rho_0 = \frac{M_0 p}{R T},$$

hvor $M_0 = 29,097$ g/mol er luftens molarmasse, $R = 8,31451$ Pa·m³/mol/K er (ideal)gaskonstanten, p er trykket målt i pascal og T er temperaturen målt i kelvin¹.

¹I den tekniske videnskab anvendes næsten udelukkende temperaturskalaen kelvin. Kelvinskalaen er den eneste temperaturskala hvor det absolutte nulpunkt rent faktisk ligger ved 0 - altså 0 K - og hvor den relative inddeling mellem de enkelte trin på skalaen altså 1 K, 2 K, 3 K osv. er den samme som på celsiuskalaen.

Det viser sig, at temperaturen varierer en del op gennem de forskellige lag af atmosfæren. Eksempelvis aftager temperaturen fra ca. 15 °C til omkring -55 °C i løbet af troposfæren. Troposfæren er ca. 11 km høj og er den del af atmosfæren der ligger tættest på jordoverfladen. Det meste der er skabs af os mennesker eksisterer således i troposfæren, selv kommercielle rutefly flyver typisk i grænselaget mellem troposfæren og den efterfølgende stratosfære. Figur 5 viser en grov skitse af opdelingen af atmosfæren i henholdsvis troposfæren, stratosfæren, mesosfæren og termosfæren og den tilknyttede udvikling i temperaturen.



Figur 3: Skitse af atmosfærens opbygning.

Erfaringsmæssigt ved man at temperaturfaldet i troposfæren tilnærmelsesvis er *lineært*. Det vil sige, at vi kan beskrive temperaturen i højden h med en ligning

Ligning 4:

$$T(h) = T_0 - \Gamma h,$$

hvor $\Gamma = 6,5$ K km⁻¹ og $T_0 = 288$ K. Det viser sig at luftfugtighed ikke har nogen nævneværdig indflydelse på hvordan det atmosfæriske tryk udvikler sig i højden, selvom temperaturen varierer i troposfæren.

Hvis man kender en temperatur i grader celsius, bestemmes den tilsvarende værdi i kelvin (her siger man ikke grader foran!) ved følgende omregning

$$T [\text{Kelvin}] = t [\text{grader Celsius}] + 273,15$$

Dette skyldes især at temperaturen bliver mindre jo højere man kommer op i troposfæren, så luften kan indeholde mindre og mindre vand og forskellen på tør og fugtig luft bliver således også mindre og mindre.

Hvis ligning (2), (3) og (7) kombineres, kan man vise at det barometriske tryk i højden h i troposfæren følger den såkaldte barometriske formel

Ligning 5:

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{T_0} h\right)^{\frac{M_0 g}{R \Gamma}},$$

hvor $p_0 = 101325$ Pa som er trykket ved jordoverfladen. Bemærk dog at, modsat trykket i højden, så er trykket ved jordoverfladen under indflydelse af både temperatur og fugtighed. Temperaturen varierer typisk 10 grader celsius hen over et døgn og luftfugtighed kan variere med mere end 20 %². Hertil kommer at mange bygninger har klimakontrol, hvor blandt andet luftfugtighed kontrolleres og typisk holdes under 45 % for at undgå svamp og husstøvmider. Samtidig kan der udenfor i Danmark være en luftfugtighed på 95 %. Så dette må der tages højde for når højdemåleren kalibreres således at den virker under alle forhold.

Atmosfæretrykket op igennem Troposfæren beregnes ved hjælp af ligning (5). Dette er vist på figur 3. Ligning (5) kan godt se lidt kompliceret ud. Heldigvis kan vi, så længe vi befinder os tæt ved jordoverfladen, med en god tilnærmelse antage, at trykket kan beskrives med en lineær tilnærmelse

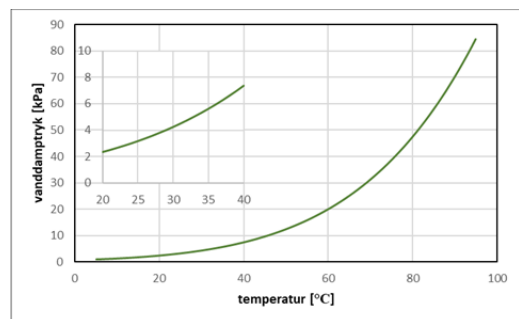
Ligning 6:

$$p(h) \approx p_0 + ah$$

hvor hældningskoefficienten a , som udtrykker hvor meget trykket aftager pr. højdeenhed, og trykket p_0 , som er trykket ved 'havoverfladen' nu er parametre der skal bestemmes under en kalibrering. I denne øvelse lader vi som om at gulvet i den bygning målingerne foretages i er havoverfladen selvom dette selvfølgelig ikke er helt korrekt.

Boks 1: Fugtig luft

Ægte tør luft er dog en sjældenhed i troposfæren, fordi der fra jordoverfladen afdamper vanddamp. Vandmolekyler opfører sig anderledes end resten af gasserne i atmosfæren. Vanddamp kondenserer eksempelvis ud på vinduer når temperaturen falder om natten. Kondens på vinduer sker fordi den mængde vanddamp som atmosfæren kan indeholde kun afhænger af temperaturen. Figur 3 viser den såkaldte damptrykkurve for en mættet våd atmosfære. Atmosfæren siges at være mættet når kondensation af vand i luften, som tilbageføres til det flydende vand på jordoverfladen sker i lige så vid udstrækning som fordamning fra jordoverfladen.



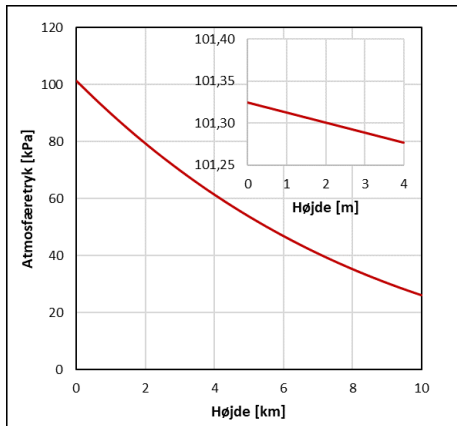
Figur 4: Damptrykkurve for en mættet atmosfære.

Figur 4 viser damptrykket for en mættet atmosfære. Alt efter årstid og tid på dagen er atmosfæren langt de fleste dage ikke helt mættet. Atmosfærens aktuelle indhold af vand angives ved hjælp af størrelsen 'relativ luftfugtighed' som kaldes h og bestemmes som forholdet mellem damptrykket af den aktuelle atmosfære og damptrykket af den mættede atmosfære på en bestemt dag. Dette er selvsagt en målt størrelse.

Ligning 7:

$$h = \frac{P_{\text{aktuel}}}{P_{\text{mættet}}}$$

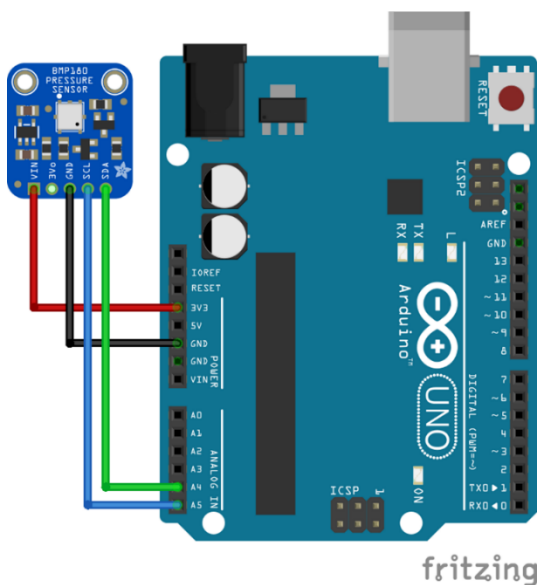
² Hold eksempelvis øje med målinger fra <https://www.dmi.dk/maalinger-seneste-24-timer/>



Figur 5: Trykket som funktion af højden i atmosfæren begyndende fra jordoverfladen.

4 Konstruktion af trykmåleren

Til Arduino produceres en række tryksensorer der måler barometrisk tryk. Disse er ofte af typen BMP180 eller BMP280 som kommunikerer med Arduinoen via en I2C protokol. Selve trykmåleren sidder på et modul med følgende pins Vin, GND SCL SDA og 3.3, hvoraf ku de 4 første skal bruges. Dette vises på figur 6 herunder. Vin (hedder nogle gange Vcc) er modulets forsyningsspændingskilde og skal forbindes til 3,3 V på Arduinoen, ligeledes forbindes GND (ground) til en GND på Arduinoen. I2C bruger altid de analoge pins A4 til datalinje og A5 til tidslinje. Disse forbindes derfor således. SCL til A5 og SDA til A4.



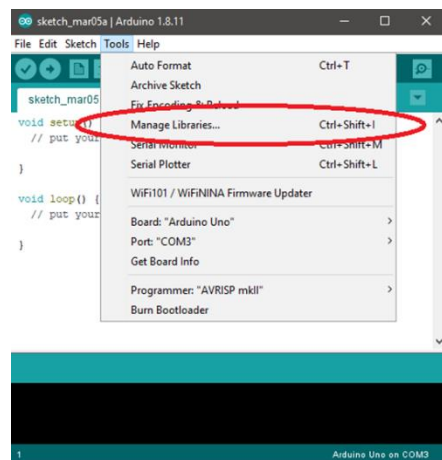
Figur 6: Tilkobling af BMP180/ BMP280 sensor til Arduino.

5 Kode

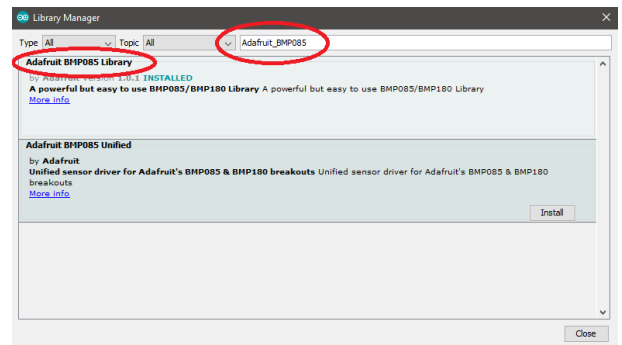
For at kunne benytte BMP180 sensorerne har fabrikanten leveret et bibliotek der håndterer selve kommunikationen mellem sensor og Arduino. Biblioteket skal hentes i Arduinoens "Library Manager" som findes i "Tools"-menuen, som det ses på figur 7 og 8.

Efterfølgende kaldes biblioteket som:

```
#include <Adafruit_BMP085.h>
```



Figur 7: I Tools vælges Library Manager.



Figur 8: I Library Manager søges efter Adafruit_BMP085 hvorefter dette bibliotek installeres.

Herunder findes et eksempel på en kode der udlæser det barometriske tryk (BMP180.readPressure()) fra en BMP180 sensor (Adafruit_BMP085 BMP180) ved hjælp af Adafruit_BMP085 biblioteket, som direkte kaldes Adafruit_BMP085.h.

Grundet udlæsningens fluktuerende natur, skriver koden herunder en gennemsnitlig værdi fra 100 udlæsninger ud til monitor.

Boks 2: Massefylde af fugtig luft

Som nævnt i Boks 1 så skal vi ikke forvente at luften almindeligvis hverken indenfor eller ude er ægte tør luft. Betyder det så at man også skal forvente et højere barometrisk tryk på grund af vanddamp? Hvis der er vandmolekyler i luften må de jo også bidrage til tyngdekraften af atmosfæren. Vandmolekyler har en molarmasse på 18,015 g/mol, så svaret er faktisk nej, man skal faktisk forvente et mindre barometrisk tryk. Ved 35 °C ses det fra figur 4 at vands damptryk ved denne temperatur er 5,6 kPa. Til sammenligning er det barometriske tryk i atmosfæren 101,3 kPa. Det betyder ifølge ligning 3 at vanddampens massefylde er 39 g/m³. Til sammenligning er den atmosfæriske lufts massefylde 1148 g/m³. Vanddampens masse udgør således kun ca. 3 % af den fugtige lufts samlede masse. Omvendt så fylder vandmolekylerne jo noget og hvis vanddamp blandes med atmosfærens andre gasser, så følger det nødvendigvis, at der må være færre af de andre gasmolekyler i en given kubikmeter luft. Langt de fleste andre gasmolekyler har en højere molarmasse end vand og derfor bliver massefylden af fugtig luft mindre end massefylden af tør luft. Figur 5 viser massefylden af henholdsvis tør og fugtig luft beregnet ud fra ligningen

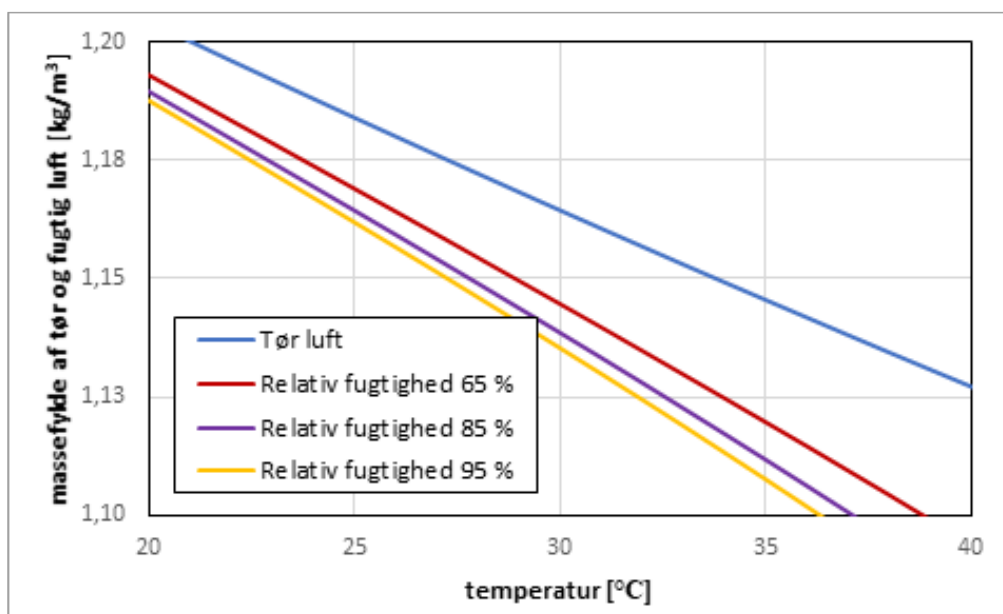
Ligning 8:

$$\rho = \frac{M_0 p}{R T} \left(1 - x_{H_2O} \left(1 - \frac{M_{H_2O}}{M_0} \right) \right),$$

hvor $M_{H_2O} = 18,015$ g/mol og der ses at massefylden varierer signifikant alt afhængigt af både temperaturen og luftfugtighed. I ligning 6 er x_{H_2O} den molære procentdel af vanddamp i forhold til luft

Ligning 9:

$$x_{H_2O} = h \frac{p_{m\ddot{a}ttet}}{p}.$$



Figur 9: Luftens massefylde som funktion af vand(damp) indhold

```

// Biblioteker
#include <Wire.h>
#include <Adafruit_BMP085.h>
// Sensoren navngives BMP180
Adafruit_BMP085 BMP180;

// Konstanter
const int num = 100; //
float val[num];      // udlæsning.
float sum = 0;       // løbende sum.
float avg = 0;       // middelværdien.
int idx = 0;         // index.

void setup() {
  Serial.begin(9600);
  BMP180.begin();
  // Initialiser val med nul.
  for (int cnt = 0; cnt < num; cnt++) {
    val[cnt] = 0;
  }
}

void loop() {
  sum = sum - val[idx];
  val[idx] = BMP180.readPressure();
  sum = sum + val[idx];
  idx = idx + 1;
  // Genstart
  if (idx >= num) {
    idx = 0;
  }
  avg = sum / num;
  // Skriv den aktuelle værdi
  Serial.println(avg);
}

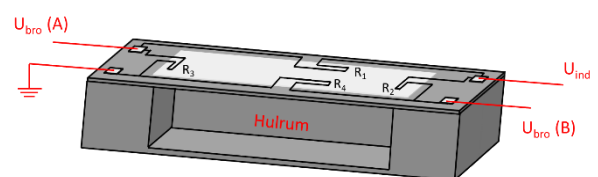
```

6 Kalibrering

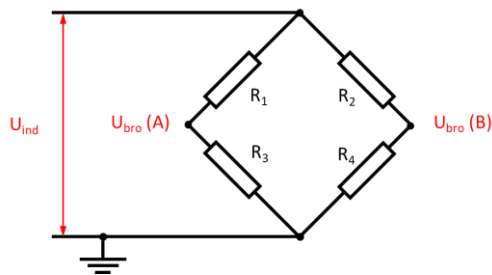
BMP180 sensoren består af et hulrum med en fleksibel membran over hulrummet, se figur 10. Når atmosfæren trykker på membranen ændres modstanden i de metaltråde der er inddampet ovenpå membranen.

Disse metaltråde danner en Wheatstonebro som er i balance når membranen er ubelastet dvs. når der er samme tryk over membranen som inden i trykmåleren. Broen bringes ud af balance når trykket udenfor ændres i forhold til hulrummet og derved opstår der en spændingsforskel mellem punkterne A og

B i Wheatstonebroen, se figur 11. Spændingsforskellen aflæses af Arduinoen og omsættes til et tryk ved hjælp af en model det ligger i trykenhedens elektronik fra producentens side.



Figur 10: Principskitse af en BMP trykmåler der måler absolut tryk. Det lyse område er membranen.



Figur 11: Kredsløbsdiagram for en Wheatstonebro.

Man kan læse mere om Wheatstonebroen på hjemmesiden metrologi.dk under Arduino-øvelsen Wheatstonebroen.

Ved hjælp af en tommestok måles en række sammenhørende værdier af højde (målt i meter) og tryk (målt i pascal), som udlæses fra BMP180 sensoren. Disse indføres i Excel (eller et lignende regneark).

Derfor er det vigtigt at der er mindst en i hver gruppe der har en computer. I Excel skal laves 1) en grafisk afbildning af data og 2) en lineær regression af data så modelparametre kan bestemmes med tilhørende standardusikkerhed. Data kan eksempelvis se sådanne ud i Excel:

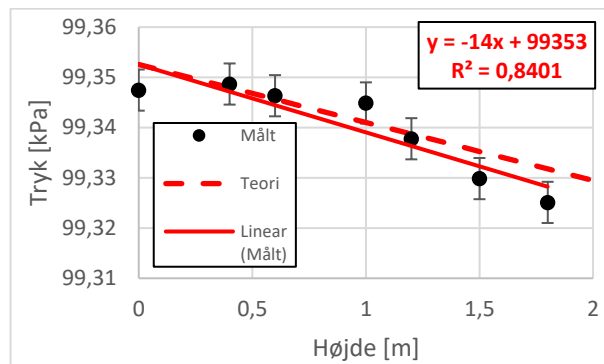
Data	
Højde [m]	Tryk [Pa]
x	y
0	101325
0,5	⋮
⋮	⋮

Lav mindst 5 punkter. Det er vigtigt at der tages en gennemsnitsværdi over noget tid.

Brug lineær regression til at bestemme det lineære udtryk der bedst passer til dine målinger. Lineær regression er beskrevet i kompendiet A2a i vores download sektion. Det kunne eksempelvis se ud som viste herunder.

a, p_0	-13.6171	99352.57
$u(a), u(p_0)$	2.637409	2.897723
$R^2, u(y)$	0.840087	4.097999
F, DegFree	26.26699	5
Ssreg, Ssresid	441.1172	83.96796

På en figur, hvor data som er anvendt til den viste regression vises sammen med både den bedste rette linje og en teoretisk udregning, kan man se at eksemplet ikke er helt ved siden af



Figur 12: data sammenlignet med udregning.

Det er vigtigt at både p_0 og a bestemmes med usikkerheder. Her finder vi således

$$a = -14 \pm 3 \text{ Pa/m}$$

$$p_0 = 99353 \pm 3 \text{ Pa}$$

Nu kan ligning (6) bruges til at bestemme højden, givet en vilkårlig udlæsning, p , fra BMP180 sensoren. Det ses direkte fra ligning (6) at

Ligning 10:

$$h = \frac{p - p_0}{a},$$

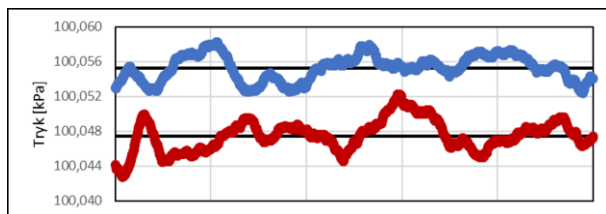
som indføres i koden som vist på side 9 og husk at bruge dine værdier af p_0 og a .

På grund af effekter som atmosfærisk høj- og lavtryk og mængden af vanddamp i luften, så skal man altid kalibrerer sin højdemåler inden den kan bruges, for ændringerne i atmosfæretryk fra dag til dag er store i forholdt til trykændringer henover et par meter. Normale trykvariation er indenfor 99200 Pa til 10200 Pa, hvilket svare til 2 %. Til sammenligning svare trykforskellen mellem 0 meter og 2 meter til omkring 0,02 %.

7 Usikkerhedsbudget

Usikkerhedsbudgetter er beskrevet i kompendiet A2 og eksempler på usikkerhedsbudgetter er samlet i kompendiet A3 i vores download sektion.

Et af de vigtige bidrag til usikkerhedsbudgettet for den højdemåler der netop har bygget er knyttet til den tilfældige variation der er mellem målinger af tryk foretaget under samme betingelser.



Figur 13: Dataopsamling fra 2 højder.

Variationerne skyldes de lokale trykvariation mm. der påvirker membranen i tryksensoren.

Figur 13 viser eksempelvis målinger foretaget lige efter hinanden og som det ses er variationen så stor at man kunne tro at de var foretaget i samme højde. Men udregnes gennemsnittet over længere tid viser sig en tydelig forskel.

Det ses med det samme at målingen af højde ikke helt stabil. Figur 14 viser et eksempel på hvordan upræcise trykmålinger leder til usikkerheder i højdemålingen. Derfor må der, med dette billige udstyr, måles i et stykke tid og derefter mildes for at kunne bestemme en højde nogenlunde præcist. Derfor må der laves et usikkerhedsbudget.

Det anbefales at bruge DFM-GUM arket fra hjemmesiden metrologi.dk til at lave usikkerhedsbudgettet med. Et eksempel på hvordan det kan se ud er vist på figur 14.

8 Afrunding

Nu kan man bruge sin kalibrerede højdemåler til at bestemme højden af bygninger, eller naturformationer på eksempelvis Møns klint eller Bornholm. Det vigtige er at højdeforskellen er større end usikkerheden.

metrologi.dk- Usikkerhedsbudget

Felter med blå skrift udfyldes af brugeren

Højdemåler

i	Målestørrelse (enhed)	Fordeling	x_i	$u(x_i)$	$u_i(y)$
1	a	Normal	-14	2.6	0.207040856
2	p0	Normal	100060.4351	2.9	0.213025401
3	p	Rectangular	100046.2158	4	-0.29382814
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
y	Højde [m]	Normal	1.044507617	0.4178286	

DFM-GUM ver. 2.2a

Conf. level =	95.45%	k =	2.0000
Result =	1.04	U =	0.84

Model: $Y = (X_3 - X_2) / X_1$

DFM

Figur 14: Et usikkerhedsbudget til tryksensoren lavet med DFM-GUM arket.

```

// Biblioteker
#include <Wire.h>
#include <Adafruit_BMP085.h>
// Sensoren navngives BMP180
Adafruit_BMP085 BMP180;

// Konstanter
const int num = 100; //
const int h = 0.0;
const int p0 = 100060.4;
const int a = -13.6;
float val[num];      // udlæsning.
float sum = 0;       // løbende sum.
float avg = 0;       // middelværdien.
int idx = 0;         // index.

void setup() {
  Serial.begin(9600);
  BMP180.begin();
  // Initialiser val med nul.
  for (int cnt = 0; cnt < num; cnt++) {
    val[cnt] = 0;
  }
}

void loop() {
  sum = sum - val[idx];
  val[idx] = BMP180.readPressure();
  sum = sum + val[idx];
  idx = idx + 1;
  // Genstart
  if (idx >= num) {
    idx = 0;
  }
  avg = sum / num;
  h = (avg - p0) / a
  // Skriv den aktuelle værdi
  Serial.println(h);
}

```
