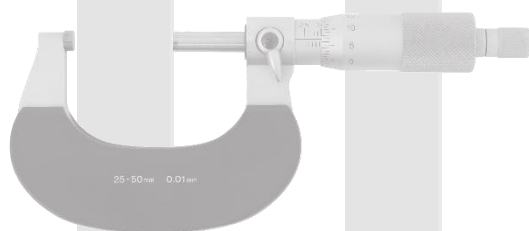


INTRODUKTION TIL USIKKERHEDSBUDGETTER

UNDERVISNINGSELEMENT

A2

—
UNDERVISNING
I MÅLETEKNIK



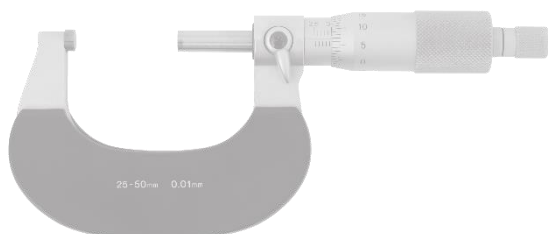
metrologi.dk



INTRODUKTION TIL USIKKERHEDSBUDGETTER

David Balslev-Harder, Sabrina R. Johansen & Morten H. Madsen, DFM A/S

3. udgave – September 2017



Copyright © 2017 metrologi.dk – Materialet må ikke anvendes til kommercielt brug, uden tilladelse fra metrologi.dk.

Metrologi.dk er finansieret af Styrelsen for Forskning og Innovation i perioden 2016 – 2018. Materialet er udarbejdet i et samarbejde mellem GTS-institutterne DFM A/S, FORCE Technology og DELTA - a part of FORCE Technology.

Læs mere om projektet på www.metrologi.dk.

Parterne i Metrologi.dk kan ikke gøres ansvarlig for fejl og mangler i indholdet af undervisningsmaterialet, i indholdet på websitet, eller i indholdet i de eksterne dokumenter og websites, der linkes til, medmindre andet følger af dansk rets almindelige regler.

Grafisk design af: Henriette Schäfer Høyrup og David Balslev-Harder.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning	1	
Boks 1: Navnet "usikkerhedsbudget"	1	
1.1 Indhold i et usikkerhedsbudget	1	
1.2 Verdens hurtigste løber?	2	
2 Modelfunktion og usikkerheder	4	
2.1 Modelfunktion	5	
Boks 2: En lineær modelfunktion	7	
2.2 Estimering af måleresultat ved gennemsnit og spredning	8	
2.2.1 Et sæt af måleværdier	8	
2.2.2 Gennemsnit af måleværdier (middelværdi) 9		
Boks 3: Middelværdi / Gennemsnit	9	
2.2.3 Standardafvigelse for måleværdier	9	
Boks 4: Standardafvigelse	9	
2.2.4 Standardusikkerhed af måleværdier	10	
Boks 5: Standardusikkerhed	10	
2.3 Relativ usikkerhed	10	
2.4 Regneregler for usikkerheder	10	
Boks 6: Regneregler for usikkerheder	11	
3 Verdens hurtigste løber?	11	
3.1 Måleusikkerhed på tidtagning for 100 meter sprint	11	
Boks 7: Eksempel – Manuel tidsmåling af 100 meter løb	14	
3.1.1 Udregning af den samlede usikkerhed for manuel og elektronisk tidsmåling	15	
Boks 8: Betydende cifre	16	
4 Usikkerhedsbudget for en temperaturmåling	17	
4.1 Kalibrering af et termometer	17	
4.2 Korrektion af målinger	18	
4.3 Udregning af usikkerhed for den korrigerede temperatur	20	
4.3.1 Overvejelser ud fra størrelserne på usikkerhedsbidragene	20	
4.4 Udregning af de individuelle usikkerhedsbidrag 20		
4.5 Angivelse af et måleresultat	22	
4.6 Øvrige kilder til usikkerhed på temperaturmålingen	22	
4.6.1 Skalainterval	23	
4.6.2 Temperaturgradient	23	
4.6.3 Det reviderede usikkerhedsbudget	24	
5 Generel fremgangsmåde	25	
6 Opsummering	26	
7 Ordliste	27	
8 Litteraturliste	28	
9 Appendix	29	
10 Læringsudbytte	30	

1 Indledning

Formålet med en måling er at bestemme værdien af en målestørrelse. F.eks. hvad en klase bananer vejer (målestørrelsen er her masse). Desværre er ingen måling perfekt bestemt, og der vil altid være en måleusikkerhed på den fundne værdi.

Der er mange kilder som bidrager til usikkerheden på en måling. Det kan f.eks. være kilder som:

- Det anvendte instrument, som har stor betydning. F.eks. vil det oftest være mere præcist at opmåle et måleemne med en skydelære fremfor med en lineal.
- En operatør, altså personen som udfører målingen, som glemmer at følge en eksakt procedure. Dette vil også give en øget usikkerhed på målingen.
- Omgivelserne, såsom temperatur og tryk, hvilket også har indflydelse på målinger.

Det kan være vanskeligt at holde styr på alle disse forskellige kilder til usikkerheden på en måling. Derfor anvendes *usikkerhedsbudgetter*. *Usikkerhedsbudgetter* kan også betragtes som et usikkerhedsregnskab eller et usikkerheds-bogholderi, se Boks 1.

Boks 1: Navnet "usikkerhedsbudget"

Et usikkerhedsbudget burde i virkeligheden hedde et usikkerhedsregnskab. Et budget er noget man lægger før man går i gang (budgettet for næste år). Et regnskab er noget, man opstiller, efter man har fuldført opgaven (regnskabet for sidste år ...). Man kan godt opstille usikkerhedsbudgettet, før man begynder målingerne, men de endelige usikkerheder afhænger af de målinger man udfører. Derfor burde det nærmere hedde usikkerhedsregnskab, men termen usikkerhedsbudget, som stammer fra det engelske "uncertainty budget", er så udbredt, at vi også bruger den på dansk.

1.1 Indhold i et usikkerhedsbudget

I Tabel 1 er vist en skabelon til et usikkerhedsbudget. Usikkerhedsbudgettet indeholder et antal *inputstørrelser* $x_1, x_2, \dots, x_n$ [1]. Inputstørrelserne kombineres ved brug af en *matematisk modelfunktion* (uddybes i afsnit 2.1). *Outputstørrelsen* fra modelfunktionen udgør måleresultatet y . For hver inputstørrelse indsættes, en enhed, værdi og usikkerhed. Disse kan f.eks. bestemmes som beskrevet i afsnit 2.2. Ud fra modelfunktionen og de indsatte usikkerheder kan man ved hjælp af særlige regneregler (se afsnit 2.4) udregne usikkerheden for måleresultatet, som betegnes $u(y)$.

De omtalte begreber vil blive uddybet i de efterfølgende afsnit og benyttes i to eksempler: et om tidsmåling og et om temperaturmåling.

Tabel 1: En skabelon til et usikkerhedsbudget.

Symbol x	Størrelse	Enhed	Værdi $\bar{x}$	Usikkerhed $u(x)$	Usikkerhedsbidrag $u_x(y)$
x_1	Første inputstørrelse	-	-	-	-
x_2	Anden inputstørrelse	-	-	-	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	Sidste inputstørrelse	-	-	-	-
y	Måleresultatet	-	-	-	-
Modelfunktion: $= f(x_1, x_2, \dots, x_n)$					

Som tidligere nævnt anvendes et usikkerhedsbudget til at holde styr på alle kilderne som bidrager til måleusikkerheden. Men derudover kan et usikkerhedsbudget også bruges til analysere hvordan man lettest kan forbedre en måling.

I usikkerhedsbudgettet sætter man tal på hvor meget hver enkelt kilde/inputstørrelse bidrager til måleresultatets usikkerhed. Dette kaldes *usikkerhedsbidrag* $u_x(y)$, og fremgår af sidste kolonne på Tabel 1. Oftest vil det være lettest at forbedre en måling ved at have fokus på de inputstørrelser som giver det højeste usikkerhedsbidrag. Mere herom i afsnit 4.4.

Med et usikkerhedsbudget får man et overblik over, hvad der indgår i modellen, og hvilke af bidragene fra modellens forskellige inputs der har indflydelse på målingens usikkerhed. Til opstilling af usikkerhedsbudgetter er det praktisk at have en systematisk tilgang. En systematisk tilgang vil blive beskrevet i de afsnit 3 og 4.

Det første skridt til at opstille et usikkerhedsbudget er, at identificere hvad der skal måles. Dette er ofte sværere end man tror. Processen med at afklare, hvad det er der er behov for at måle og hvordan dette skal

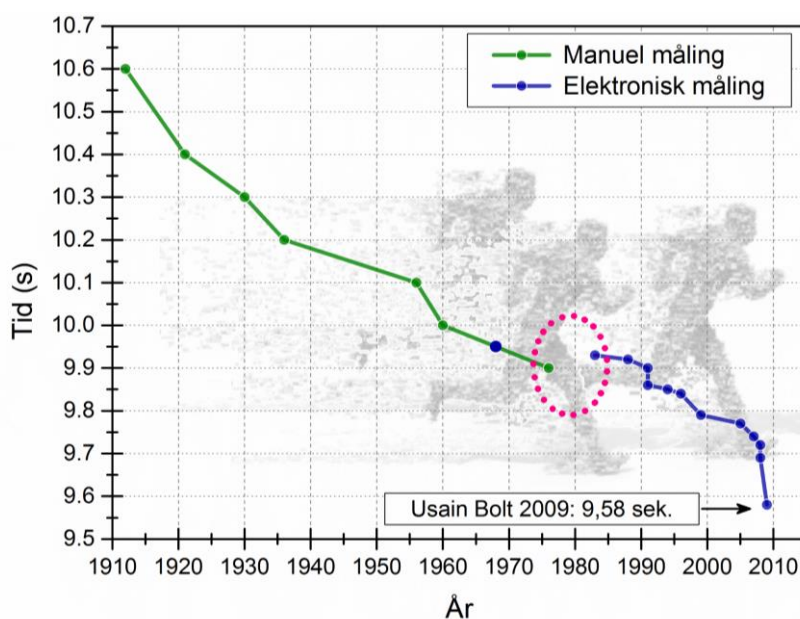
måles, foregår typisk i flere skridt. Det kan være nødvendigt at lave nogle indledende målinger. Det kan også være nødvendigt at konsultere med kunder, kolleger og evt. designingeniører, for at tilpasse opgaven med hensyn til forventninger til usikkerheden for måleresultatet. Det kan således være nødvendigt at tilpasse usikkerhedsbudgettet flere gange for at identificere alle nødvendige bidrag og disse bidrags størrelser.

Som inspiration og motivation for betydningen af usikkerheder og vigtigheden af usikkerhedsbudgetter, starter vi med en lille historisk fortælling om udviklingen i verdensrekorder for mænds 100 meter løb.

1.2 Verdens hurtigste løber?

Hvem er verdens hurtigste løber?

Det er umiddelbart et simpelt spørgsmål, men det er på mange måder upræcist. Er det den hurtigste løber blandt mennesker eller dyr der spørges efter? På hvilken distance ønsker man, at finde den hurtigste løber? Er det personen med den højeste tophastighed? Eller er det personen med den hurtigste gennemsnits-



Figur 1: Udviklingen i verdensrekorder for mænds 100 meter sprint. Længst til højre, den stående verdensrekord af Usain Bolt på 9,58 sek. fra 2009.

Tabel 2: Udsnit af 100 m verdensrekorder for mænd. Angivet er hvilken metode der blev anvendt til tidtagningen.

Løber	År	Tid (s)	Metode
A. Hary	1960	$10,0 \pm 0,05$	Manuel
J. Hines	1968	$9,95 \pm 0,005$	Elektronisk
S. Williams	1976	$9,9 \pm 0,05$	Manuel
C. Smith	1983	$9,93 \pm 0,005$	Elektronisk
D. Bailey	1996	$9,84 \pm 0,005$	Elektronisk
U. Bolt	2009	$9,58 \pm 0,005$	Elektronisk

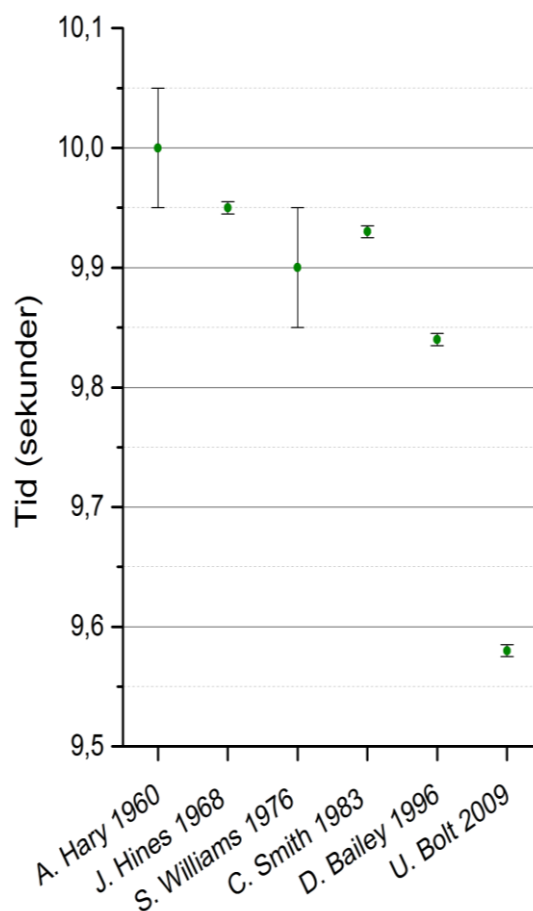
hastighed over distancen? Og muligvis mange flere spørgsmål.

Det er en forudsætning, at have et velbestemt spørgsmål, for at den rette metode og det rette måleudstyr kan vælges, til at udføre en måling som kan besvare spørgsmålet. F.eks. hjælper det ikke at have verdens bedste ur, hvis det er massen af et lod man skal måle. Så vil det nok være bedre at have en god vægt. Men hvor godt skal udstyret være? Ja, det afhænger ligeledes af hvad man prøver at besvare.

Spørgsmålet om verdens hurtigste løber, vil vi vælge at præcisere til:

Hvilken mand er verdens hurtigste løber på en 100 meter strækning?

Siden 2009 vil de fleste nok svare: Usain Bolt. Her smadrede han alle tidligere verdensrekorder ved at løbe 100 meter på 9,58 sekunder. I 1983 opstod der dog en spøjst situation. Her kunne to løbere samtidig sige, at de var verdens hurtigste på 100 meter. Ved at kigge nærmere på tidsmålingerne af de to løbere, vil vi undersøge, hvordan denne situation kunne opstå.



Figur 2: Udsnit af 100 m verdensrekorder for mænd. Angivet er løbetiden (grøn cirkel) med tilhørende usikkerhed (lodrette sorte streg med vandrette ende-streger, kaldes også for en usikkerhedsbjælke).

I 1964 begyndte man at indføre elektronisk tidtagning for de korte løbedistancer. Med elektronisk tidtagning kan man automatisk synkronisere startskud og målfoto. Herved blev det muligt at udføre mere nøjagtige målinger. De fleste løb fortsatte dog med manuelle målinger indtil 1977.

På Figur 1 er en graf, som viser, hvordan verdensrekorden i 100 meter sprint har udviklet sig de sidste hundrede år. Grafen viser også overgangen fra manuelle tidsmålinger (grøn kurve) til elektroniske tidsmålinger (blå kurve). Ved overgangen er den nye rekord *langsommere* (dårligere) end den gamle verdensrekord.

For at finde ud af, hvem der er hurtigst, skal man kigge på usikkerhederne på målingerne. Et udsnit af tider med tilhørende usikkerhed er vist i Tabel 2. De tilsvarende tider og usikkerheder er ligeledes illustreret i grafen på Figur 2. Ved de manuelle målinger er usikkerheden $\pm 0,05$ sekunder. Den målte tid er derfor enten 0,05 sekunder for lav eller 0,05 sekunder for høj. Med de elektroniske målinger er usikkerheden $\pm 0,005$ sekunder, altså 10 gange lavere eller med andre ord 10 gange bedre end de manuelle målinger.

Williams' verdensrekord fra 1976 skal læses som at han har løbet de 100 meter på mellem 9,85 sekunder og 9,95 sekunder. Dette kaldes for *usikkerhedsintervallet*. Tilsvarende skal Hines' tid fra 1968 læses som en tid mellem 9,945 sekunder og 9,955 sekunder. For at afgøre, hvem af de to der er hurtigst, sammenlignes de langsomste tider fra usikkerhedsintervallerne. Det vil sige, 9,95 sekunder og 9,955 sekunder. Da Williams' langsomste tid på 9,95 sekunder er mindre end Hines' langsomste tid på 9,955 sekunder, så overgik verdensrekorden til Williams i 1976. Dette kan også ses ved at sammenligne "toppen" af usikkerhedsbjælken på de to målinger på Figur 2. Usikkerhedsbjælkenes top på Hines' tidsmåling ligger højere end Williams'.

I 1983 løb Smith derimod på 9,93 sekunder. Den langsomste tid i Smiths usikkerhedsinterval er her 9,935 sekunder. Dette blev dermed den nye verdensrekord, da den slog Williams' langsomste tid på 9,95 sekunder. Men fordi Williams' tid blev målt med et større usikkerhedsinterval, kunne han potentielt set have løbet på tiden 9,85 sekunder. Denne tid ville således ikke være slået af Smiths hurtigste tid på 9,925 sekunder. Derfor kan man ikke sige med sikkerhed, om Williams' tid var hurtigere en Smiths, da målingen fra 1976 ikke var præcis nok. Williams kunne således have beholdt sin verdensrekord helt til 1996, før man med sikkerhed kunne sige at den var slået.

De forbedrede målinger, som brugen af elektronisk tidsmåling har medført, har gjort det meget lettere at vurdere, om der er sat en ny verdensrekord. Som det fremgår af udviklingen af 100 m rekorderne, er kendskabet til og vurdering af en målings usikkerhed helt afgørende for, hvordan vi kan tolke et spørgsmål, som

ellers kan virke ligetil. Var Smith hurtigere eller langsommere end Williams? Svaret er: det ved vi ikke, for usikkerheden på Williams' måling var simpelthen for stor.

Med introduktionen af den elektroniske tidsmåling opstod en ny situation, hvor det var meget nemmere at skelne løbetiderne. Om det bliver nødvendigt at introducere endnu bedre tidsmålinger i fremtiden er ikke sikkert for der er også andre parametre som vindmodstand og luftfugtighed osv. som påvirker den enkelte løbers tider.

Før vi dykker dybere ned i usikkerhedsbudgettet for tidsmålingen af en løber skal vi have nogle nødvendige begreber og formler på plads. Dette gennemgås i afsnit 2, hvorefter vi vil vende tilbage til løbe eksemplet i afsnit 3.

2 Modelfunktion og usikkerheder

Har du målt en temperatur, er det sandsynligt, at du måler lidt for højt eller lidt for lavt i forhold til den sande værdi. Den usikkerhed som temperaturmålingen er behæftet med kan stamme fra flere usikkerhedskilder.

I dette afsnit gives en introduktion til, hvordan man behandler mange kilder til usikkerhed ved at opstille et usikkerhedsbudget.

For at opstille et usikkerhedsbudget skal man først (1) vide hvad man ønsker at måle, og (2) identificere alle de mulige fejlkilder som kan påvirke målingen eller bidrage til at øge usikkerheden. (3) Dernæst opstilles en modelfunktion, som beskriver hvordan målingen påvirkes af de enkelte kilder/bidrag.

I de følgende underafsnit gennemgår vi derfor, hvad en modelfunktion er (afsnit 2.1), og hvordan man bestemmer måleværdi og usikkerhed ud fra et sæt målinger (afsnit 2.2).

2.1 Modelfunktion

En modelfunktion er et matematisk udtryk, der beskriver sammenhængen mellem to eller flere målestørrelser. Målestørrelserne kan være længde, hastighed, temperatur osv. afhængig af, hvad din modelfunktion forsøger at beskrive. I boks 2 er beskrevet nærmere hvad der menes med en funktion.

Et eksempel på en modelfunktion, er udtrykket for et rørs indre tværsnitareal a

Ligning 1:

$$a = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

hvor d er den indre diameter målt på røret, se Figur 3. Modelfunktionen fortæller os at rørets tværsnitareal a er afhængig af diameteren d .

Hvis diameteren er 0,5 cm fås, at tværsnitarealet er

$$a = \pi \cdot (0,5 \text{ cm}/2)^2 = 3,1416 \cdot 0,0625 \text{ cm}^2 = 0,1963 \text{ cm}^2.$$



Figur 3: Rør med indtegnet indre diameter, d .

Et andet eksempel på en modelfunktion er arealet A af et rektangulært fabriksgulv med en målt længde L og målt bredde B . Da er arealet givet ved

Ligning 2:

$$A = L \cdot B$$

Hvilket er en modelfunktion som beskriver hvordan arealet A , afhænger af længden og bredden af gulvet.

Generelt kan en funktion angives ved $y = f(x)$, hvor x kaldes den *uafhængige* variabel og y kaldes den *afhængige* variabel, som begge er tal. f er blot et navn, der gør det muligt at kende flere funktioner fra hinanden.

For arealerne ovenfor svarer a og A til den afhængige variabel y . Vi kan introducere funktionsnavne for de

to arealer, ved brug af de samme navne som de uafhængige variable, x . Det vil sige for rørets areal fås modelfunktionen

Ligning 3:

$$a(d) = \pi \cdot (d/2)^2$$

og $a = a(d)$. d kaldes også for *inputstørrelse* i et usikkerhedsbudget.

For arealet af gulvet er der mere end en målestørrelse i udtrykket, nemlig både længde og bredde. Gulvets areal er således en funktion af flere uafhængige variable/inputstørrelser. Dette kan angives ved at skrive

Ligning 4:

$$A(L, B) = L \cdot B$$

Et generelt udtryk for funktioner af flere variable kan skrives som

Ligning 5:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

hvor x_1 er den første inputstørrelse, x_2 den anden inputstørrelse osv. Denne nummerering (indeksering) løber op til den sidste inputstørrelse, som er nummereret med n . Hvis der samlet er 4 inputstørrelser er $n = 4$.

For en modelfunktion er variablene x og y ikke kun tal men faktiske målestørrelser med talværdi, usikkerhed og enhed. En modelfunktion adskiller sig yderligere fra en generel funktion i kraft af, at inputstørrelserne ikke behøver at være uafhængige. For eksempel vil længde og bredde i målingen af gulvarealet A ovenfor, have en gensidig afhængighed, såfremt de begge er målt med den samme målestok.

En modelfunktion for bestemmelse af koncentrationen af sukker opløst i kaffe ville som eksempel kunne opstilles som følger:

Sukkeret afvejes, inden det hældes i kaffen, til at have en masse m på 10,7 g. Efter at sukkeret er hældt i kaffen, måles volumenet V til 0,29 L. Sukkerkoncentrationen c er en funktion af massen m og volumenet V og er givet ved udtrykket

Ligning 6:

$$c(m, V) = \frac{m}{V}$$

Regnereglerne for måleværdi og enheder er de samme som de almindelige regneregler for tal. Sukkerkoncentrationens værdi bliver således

Ligning 7:

$$c(m, V) = c(10,7 \text{ g}, 0,29 \text{ L}) = \frac{10,7 \text{ g}}{0,29 \text{ L}} = 11,63 \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

Usikkerhederne har derimod andre regneregler, som vi kommer ind på i afsnit 2.4. Regnereglerne for usikkerheder skal nemlig afspejle hvad største fejl bliver for funktionsværdien, når alle inputstørrelserne varieres inden for deres respektive usikkerhedsintervaller.

Boks 2: En lineær modelfunktion

Det sker ofte, at når én ting ændres, så er der andre parametre som også ændre sig. Det betegnes at de to ting er *afhængige* af hinanden.

Hvis du f.eks. har en meget varm kop kaffe, så vil den, efterhånden som tiden går, afkøles til den omgivende temperatur. Det vil sige at kaffens temperatur er afhængig af tiden, eller sagt på en anden måde, kaffens temperatur er en *funktion* af tiden.

Hvis vi antager, at afkølingen er *lineær* afhængighed af tiden, vil det give følgende matematiske funktion:

Ligning 8:

$$y = a \cdot x + b$$

Hvor y er temperaturen af kaffen, og x er tiden. x og y er *variable*, det vil sige at de kan variere. Derimod vil a og b have en fast værdi. Hældningen a angiver hvor meget temperaturen falder pr. minut. F.eks. kunne temperaturen falde med $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ pr. minut, $a = -2\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{minut}$. b angiver start-temperaturen for kaffen, den kunne f.eks. være $90\text{ }^{\circ}\text{C}$. Dette er indtegnet i koordinatsystemet på Figur 4.

Den matematiske funktion for afkølingen af kaffen er således:

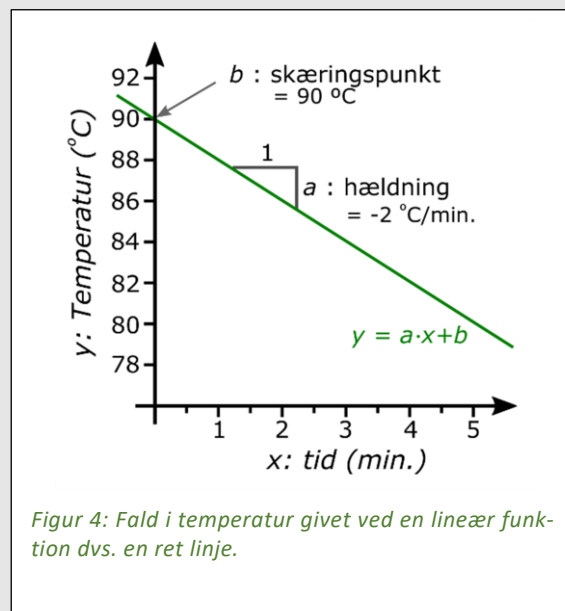
Ligning 9:

$$y = -2\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{minut} \cdot x + 90\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Med denne matematiske funktion er det nu muligt at forudsige hvor kold kaffen vil være efter f.eks. 5 minutter, $x = 5$ minutter:

$$y = -2\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{minut} \cdot 5\text{ minutter} + 90\text{ }^{\circ}\text{C} = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Den matematiske funktion som beskriver sammenhængen mellem to variable behøver ikke være lineær som i dette tilfælde. Den kunne f.eks. også være *eksponentiel*, hvilket formentlig ville være en bedre funktion at bruge til at beskrive nedkølingen af kaffe, da den er hurtigst i starten.



Figur 4: Fald i temperatur givet ved en lineær funktion dvs. en ret linje.

2.2 Estimering af måleresultat ved gennemsnit og spredning

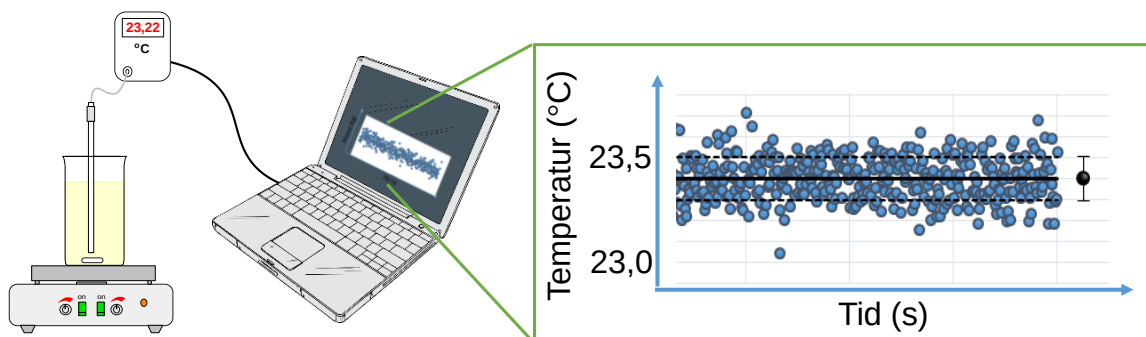
Der skelnes mellem to måder at bestemme størrelsen af en måleusikkerhed.

Type A: Ved brug af gentagne målinger benyttes statistik til at bestemme usikkerheden.

Type B: Øvrige metoder end type A anvendes til at bestemme usikkerheden. For eksempel kan erfaring fra tidligere målinger anvendes, eller der kan være fysiske forhold som begrænser usikkerheden.

Type A er den primære metode til at bestemme størrelsen af en målings usikkerhed. Mangel på tid, ressourcer og penge kan dog gøre det nødvendigt at bestemme størrelsen ved brug af type B. I det følgende vil vi give den mest typiske fremgang ved brug af type A, anvendt i et eksempel, hvor temperaturen af et vandbad måles med et elektronisk termometer.

På Figur 5 ses en varmeplade, der bruges til at styre temperaturen af en olie, som er hældt op i et målebæger. Temperaturen i oliebadet måles med et elektronisk termometer. Aflæsningerne fra termometeret bliver logget på en computer og indtegnet på en graf, som er fremhævet til højre. De individuelle loggede aflæsninger fra termometeret er vist som blå punkter på grafen. Tidspunkterne for de individuelle aflæsninger er uden betydning for de følgende udregninger.



Figur 5: Fra venstre: Et elektronisk termometer måler temperaturen i et oliebad. De målte temperaturer bliver opsamlet med en computer. De aflæste temperaturer vises på en graf.

På grafen kan man se at målepunkterne holder sig inden for intervallet fra 23 °C til 24 °C, så allerede her har vi et overslag (et estimat) for målingen som værende 23,5 °C ± 0,5 °C. Det bedste estimat for målingens værdi og måleusikkerhed fås dog ved at anvende de aflæste talværdier fra termometeret og udregne gennemsnit og spredning ud fra disse. På grafen er resultatet af dette angivet ved det sorte punkt med usikkerhedsbjælken (yderst til højre), som angiver middelværdi og spredning.

I næste afsnit vil vi se på hvordan man generelt udregner middelværdi, spredning og standard usikkerhed.

2.2.1 Et sæt af måleværdier

Et antal aflæsninger q_i er blevet foretaget for en målestørrelse q , og opskrives

$$\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$$

hvor n er det samlede antal aflæsninger af målestørrelsen q . Hver q_i er en talværdi med enhed, og i er en indeksering (nummerering) af aflæsningerne. Den første måling benævnes q_1 og den anden q_2 osv. Nummereringen løber op til den sidste måling som kaldes n . Så n er det samlede antal målinger som er foretaget. Hvis der samlet er taget 5 målinger, er $n = 5$.

Målestørrelsen q kunne for eksempel være temperaturen af oliebadet i Figur 5. Fem aflæste temperaturer kunne så være skrevet op i en liste:

{23,54 °C, 23,27 °C, 23,37 °C, 23,41 °C, 23,39 °C}

2.2.2 Gennemsnit af måleværdier (middelværdi)

Gennemsnittet $\bar{q}$ for aflæsningerne udregnes ved formelen i boks 3.

Boks 3: Middelværdi / Gennemsnit

Ligning 10

$$\bar{q} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n}{n}$$

For de fem målinger af temperaturen bliver dette:

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{23,54\text{ °C} + 23,27\text{ °C} + 23,37\text{ °C} + 23,41\text{ °C} + 23,39\text{ °C}}{5} \\ &= 23,396\text{ °C}\end{aligned}$$

Bemærk, at selvom et instrument angiver måleværdien med et endeligt antal decimaler, f.eks. som i dette tilfælde 0,01, så kan gennemsnittet godt have flere decimaler.

2.2.3 Standardafvigelse for måleværdier

Standardafvigelsen, $s(q)$ udregnes for at få en ide om hvor tæt de enkelte målinger ligger på gennemsnittet. Formlen som benyttes til at bestemme standardafvigelsen ses i boks 4.

Differenserne $q_i - \bar{q}$ sætter tal på forskellen mellem den enkelte aflæsninger q_i og gennemsnittet $\bar{q}$.

Tager man gennemsnittet af disse differenser får man 0, så dette er ikke et godt tal for spredningen af værdierne $\overline{(q - \bar{q})} = 0$. For at komme ud over dette problem kvadreres differenserne (dvs. opløftes i anden

$(q_i - \bar{q})^2$). Nu kan gennemsnittet af de kvadrerede differenser udregnes,

$$\overline{(q - \bar{q})^2} = \frac{(q_1 - \bar{q})^2 + (q_2 - \bar{q})^2 + (q_3 - \bar{q})^2 + \dots + (q_n - \bar{q})^2}{n}$$

og denne vil være forskellig fra nul, med mindre alle aflæsningerne er nøjagtig magen til gennemsnittet.

Gennemsnittet af de kvadrerede differenser har enheden (°C)², så for at enheden på spredningen passer til enheden på middelværdien, er man nødt til at tage kvadratroden.

Boks 4: Standardafvigelse

Ligning 12

$$s(q) = \sqrt{\frac{(q_1 - \bar{q})^2 + (q_2 - \bar{q})^2 + (q_3 - \bar{q})^2 + \dots + (q_n - \bar{q})^2}{n - 1}}$$

Bemærk at der ikke divideres med antallet af aflæsninger n , men med $n - 1$. Rationalet er at middelværdien også bliver udregnet fra datasættet, og derfor skal usikkerheden lige gøres lidt større. Det betyder også at man mindst skal have to aflæsninger for at kunne udregne en standardafvigelse.

For de fem temperaturlæsninger fås spredningen som angivet nedenfor i Ligning 11.

Ligning 11:

$$\begin{aligned}s(T) &= \sqrt{\frac{(23,54 - 23,396)^2 + (23,27 - 23,396)^2 + (23,37 - 23,396)^2 + (23,41 - 23,396)^2 + (23,39 - 23,396)^2}{(5 - 1)}}\text{ °C} \\ &= 0,0969\text{ °C}\end{aligned}$$

2.2.4 Standardusikkerhed af måleværdier

Den fundne standardafvigelse, $s(q)$ kan benyttes til at finde ud af hvor stor usikkerhed der er på gennemsnittet. Altså hvor præcist gennemsnittet er bestemt. Dette kaldes for *standardusikkerhed*, $u(\bar{q})$. Den generelle formel for standardusikkerheden $u(\bar{q})$ af gennemsnittet $\bar{q}$ ses i boks 5.

Boks 5: Standardusikkerhed

Ligning 13

$$u(\bar{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{n}}$$

For de fem temperaturmålinger bliver standardusikkerheden:

Ligning 14:

$$u(\bar{T}) = \frac{s(T)}{\sqrt{n}} = \frac{0,0969 \text{ }^{\circ}\text{C}}{\sqrt{5}} = 0,0433 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Standardusikkerheden fortæller hvad spredningen på middelværdien vil være. Det vil sige at, hvis man f.eks. laver 10 gentagelser af proceduren hvor der laves 5 aflæsninger af temperaturen for hvilke gennemsnittet udregnes, så vil man få 10 middelværdier, som så vil have en standardafvigelse på $u(\bar{T})$.

2.3 Relativ usikkerhed

Når man skal sammenligne usikkerheder på målestørrelser er det ofte nyttigt at sammenligne den *relative usikkerhed*, som udregnes således:

Ligning 15:

$$\frac{u(\bar{q})}{|\bar{q}|}$$

hvor $|\bar{q}|$ er absolutværdien af $\bar{q}$. Absolutværdien betyder at hvis $\bar{q} < 0$ så skiftes fortegnet, så $\bar{q}$ bliver et positivt tal.

For temperaturmålingerne ovenfor er målingens værdi bestemt som gennemsnittet af de fem målinger. Derved fås den relative usikkerhed til

Ligning 16:

$$\frac{u(\bar{T})}{\bar{T}} = \frac{0,0433 \text{ }^{\circ}\text{C}}{23,396 \text{ }^{\circ}\text{C}} = 0,00185 = 0,185 \%$$

Den relative usikkerhed er enhedsløs og kan derfor opgøres i procent. Fraværet af enhed betyder samtidig, at man skal være omhyggelig med at rapportere, hvordan den relative usikkerhed er udregnet. Netop for temperatur målt på Celsius-skalaen giver det ikke mening at tale om den relative usikkerhed. Men anvendes i stedet Kelvin-skalaen, kan man benytte den relative usikkerhed (begrundelsen for dette er omtalt i undervisningselement A1 – *Introduktion til målinger*). På Kelvin-skalaen ville man få følgende relative usikkerhed

$$\frac{u(\bar{T})}{\bar{T}} = \frac{0,0433 \text{ K}}{(23,396 + 273,15) \text{ K}} = 0,000146 = 0,0146 \%$$

Den relative usikkerhed udregnet med hensyn til Kelvin-skalaen er således væsentlig lavere end når den var udregnet for Celsius-skalaen. Er man i tvivl om hvilken enhed man skal bruge, bør man altid omregne alle målestørrelser til SI enhederne.

2.4 Regneregler for usikkerheder

I afsnit 2.1 om modelfunktioner nævnte vi, at regnereglerne for usikkerheder ikke er de samme som for måleværdier og enheder.

Regnereglerne for usikkerheder skal afspejle, hvad den største forskel i modelfunktionens output værdi bliver, når alle inputstørrelserne varieres inden for deres respektive usikkerhedsintervaller.

I boks 6 ses regnereglerne for usikkerheder. Regnereglerne vil blive benyttet i eksemplerne i afsnit 3 og 4.

Når usikkerhederne udregnes som i boks 6 siger man at "*usikkerhederne lægges sammen i kvadratur*" (dvs. at usikkerhederne er kvadreret/opløftet til 2. potens) $u(y)^2 = u(a)^2 + u(b)^2$. Dette gælder kun, når målestørrelserne/bidragene er *uafhængige*.

Hvordan man undersøger, om målestørrelser er uafhængige og hvordan man udregner usikkerheder med afhængige målestørrelser, vil ikke blive gennemgået i dette undervisningselement.

Boks 6: Regneregler for usikkerheder

Når man har en matematiskfunktion som beskriver hvordan talværdierne for en eller flere målestørrelser kombineres, så anvendes nedenstående regneregler til at udregne, hvad den samlede usikkerhed bliver.

a og b er to målestørrelser eller kilder til usikkerhed.

Addition / sum:

Når måleværdier lægges sammen gælder:

Funktion	Samlet usikkerhed:
$y = a + b$	$u(y) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$

Hvor $u(a)$ er usikkerheden på målestørrelse a og $u(b)$ er usikkerheden på målestørrelsen b .

Subtraktion / differens:

Når måleværdier trækkes fra hinanden gælder:

Funktion	Samlet usikkerhed:
$y = a - b$	$u(y) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$

Multiplikation med konstant k :

Når en måleværdi ganges med en konstant k gælder:

Funktion	Samlet usikkerhed:
$y = k \cdot a$	$u(y) = k \cdot u(a)$

Hvor $|k|$ er absolut værdien af k , dvs. at hvis k er negativ skiftes fortegnet til positiv.

Multiplikation / produkt:

Når målestørrelser ganges sammen gælder:

Funktion	Samlet usikkerhed:
$y = a \cdot b$	$u(y) = y \cdot \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$

Division:

Når en målestørrelse divideres med en anden målestørrelse gælder:

Funktion	Samlet usikkerhed:
$y = \frac{a}{b}$	$u(y) = y \cdot \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$

NB: For multiplikation og division er det de relative usikkerheder (dvs. $\frac{u(x)}{x}$) der lægges sammen.

3 Verdens hurtigste løber?

I afsnit 1.2 så vi, hvordan størrelsen af usikkerhed kan have betydning for, hvordan vi evaluerer måleresultater. I dette afsnit gennemgår vi, hvordan usikkerheden for den manuelle og elektroniske tidtagning kan bestemmes.

3.1 Måleusikkerhed på tidtagning for 100 meter sprint

I vurderingen af hvilke kilder til usikkerhed, der kan være til en måling, kan man anvende måleteknikkens sekstakkede stjerne, som blev gennemgået i A1 - *Introduktion til målinger*. De seks kilder er:

1. Måleemnet
2. Måleudstyret
3. Målemetoden
4. Miljøet
5. Referencen
6. Operatøren

Elementerne fra stjernen kan analyseres hver for sig og lægges sammen til sidst til en samlet usikkerhed. Det kræver, at alle kilderne til usikkerhed får tillagt en talværdi.

Ved at gennemgå måleteknikkens sekstakkede stjerne kan vi estimere usikkerheden for henholdsvis manuelle og elektroniske tidsmålinger ved 100 meterløb. I Tabel 3 er opstillet alle de seks typer af fejkilder fra måleteknikkens sekstakkede stjerne, og en beskrivelse af hvordan hver kilde påvirker tidsmålingen. Derudover er det enten beregnet eller estimeret hvor stor en usikkerhed hver fejkilde bidrager med.

For den manuelle tidsmåling er det operatøren der bidrager med den største usikkerhed, som er estimeret til 0,0229 sekunder. For den elektroniske tidsmåling er det måleudstyret, som giver det største bidrag med en usikkerhed på 0,0024 sekunder.

Et usikkerhedsbudget er således et vigtigt værktøj til at kunne vurdere, hvilke kilder der bidrager mest til målingens usikkerhed.

Tabel 3: Gennemgang af måleteknikkens sekstakkede stjerne til at estimere de forskellige kilder til måleusikkerhed for de to metoder af tidtagning ved 100 meter løb.

Kilde	Beskrivelse	Usikkerhed i [sek.]	
		Manuel	Elektro-nisk
Måle-emnet	Måleemnet er i dette tilfælde selve løberen. Måleudstyret påvirker ikke løberen direkte, og ligeledes påvirker løberen ikke måleudstyret. Derved bidrager måleemnet i dette tilfælde ikke med nogen usikkerhed til mållin-gen.	0	0
Måle-udstyret	Der anvendes et stopur til at udføre den manuelle tidsmåling. Stopurets skalainterval er 0,01 sekund. For at være sikker på at stopuret faktisk har denne opløsning ville det være en god ide at validere det ved yderligere målinger. Men i dette tilfælde vælger vi at stole på manualens angivelse. Som vil blive forklaret senere i afsnit 4.6.1, er bidraget til usikkerheden fra skalainddelingen givet ved at dividere skalaintervallet med $2\sqrt{3}$, dvs. $\frac{0,01 \text{ s}}{2\sqrt{3}} = 0,0029 \text{ s}$. I den elektroniske måling tages der 120 målfotos pr. sekund, dvs. for hver 0,00833 sekund tages et foto af løberen (1s/120 fotos). Igen divideres med $2\sqrt{3}$ så usikkerheden er 0,0024 s.	0,0029	0,0024
Metode	Den manuelle måling foregår ved, at tidtageren står ved mållinjen. Når startskuddet lyder, sætter tidtageren stopuret i gang, og når løberen krydser mållinjen, stoppes uret igen. Det er ikke ligegyldigt, hvor startpistolen er placeret i forhold til start- og mållinje. Lyd rejser med ca. 340 m/s (afhængig af tryk og fugtighed). Hvis startpistolen befinder sig ved startlinjen, vil det tage ca. 0,3 se-kund ¹ fra startskuddet lyder, til lyden har rejst de 100 meter fra start-linje til mållinje, hvor tidtageren står. Tidtageren vil i givet fald måle en tid der er 0,3 sekunder for langsom. Denne tidsforsinkelse er altså større end de 0,05 sekunders måleusikkerhed angivet for de manuelle målinger i Tabel 2. En bedre måleusikkerhed opnås ved at korrigere for den tidsforskyd-ning, som lydets hastighed indebærer. Men problemet kan også desig-nes væk ved at lade startpistolen være placeret midt mellem start og slut. Så vil løbere og tidsmålerne høre startskuddet med en mindre tids-forskydning. Vind på langs af banen kan dog stadig medføre en forskel i, hvornår startskuddet høres ved start- og mållinje. En forskel som ved en vind på 2 meter pr. sekund svarer til 0,002 sekunders tidsforskydning. Den elektroniske måling foretages ved at startskud og målfoto er synkro-niseret via elektriske ledninger, hvor signalerne løber meget tæt ved ly-sets hastighed. Denne forsinkelse er derfor under $1 \mu\text{s} = 0,000001 \text{ sek}$. Der kan dog stadig være forskel på, hvornår løberne hører startskuddet, så et lille bidrag på 0,0005 s tilføjes her.	0,002	0,0005

¹ $\frac{100 \text{ m}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 0,2941 \text{ s} \approx 0,3 \text{ s}$

(Tabel fortsat fra forrige side)

Kilde	Beskrivelse	Usikkerhed i [sek.]	
		Manuel	Elektro- nisk
Miljø	Stopuret benyttes ved temperatur og luftfugtighed som ligger inden for det producenten betegner som normale forhold der ikke påvirker stopuret. Derfor kan det antages at miljøet ikke vil påvirke målingen, eller at påvirkningen er så lille, at vi ikke vil kunne måle det. Dette gælder for både den manuelle og den elektroniske målemetode.	0	0
Reference	Stopuret er blevet kalibreret inden målingen hos et akkrediteret laboratorium. Det akkrediterede laboratorium har noget udstyr som automatisk kalibrerer stopuret, uden at en operatør er nødvendig. Denne kalibrering fungerer som reference. Usikkerheden på kalibreringen er oplyst i det kalibreringscertifikat som det akkrediterede laboratorium har udstedt. Usikkerheden er på 0,000001 sekunder. Den elektroniske tidsmåling blive ligeledes kalibreret hos det samme akkrediterede laboratorium og bidrager med samme usikkerhed.	0,000001	0,000001
Operatør	For den manuelle tidsmåling er operatøren tidtageren. Starter operatøren stopuret for tidligt eller sent, vil det påvirke målingen. Da det enkelte løb ikke kan gøres om, er det en fordel at have flere operatører til at udføre tidsmålingen parallelt. Dermed mindskes risikoen for, at manglende fokus fra en enkelt operatør ødelægger en måling. Dette giver også en mulighed for at sammenligne de forskellige tidsmålinger. Usikkerheden, som operatøren bidrager med er beregnet i regneeksemplet i boks 7. For den elektroniske tidsmåling er der ikke direkte en operatør, idet målingen foretages elektronisk og automatisk er synkroniseret.	0,0229	0

Boks 7: Eksempel – Manuel tidsmåling af 100 meter løb

For et 100 meterløb, målt med manuel tidtagning, kan løbetid og usikkerhedens størrelse f.eks. estimeres ved følgende fremgang:

Den manuelle tidsmåling udføres simultant af 10 personer (tidtagere), som hver laver en måling, af et 100 m løb for én løber. Det giver 10 måletider $t_1, t_2, \dots, t_{10}$ som kunne falde ud som følger:

$$\{t_1 \ t_2 \ \dots \ t_{10}\} = \{9,79 \ 9,80 \ 9,82 \ 9,83 \ 9,87 \ 9,88 \ 9,90 \ 9,92 \ 9,93 \ 9,95 \ 10,03\} \text{ s}$$

Et godt estimat for løbetiden, vil da være bestemt ved gennemsnittet af de målte tider $\bar{t}$, udregnet ved (se afsnit 2.2.2 for den generelle formel for gennemsnittet):

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{10}}{10}$$

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{9,79 \text{ s} + 9,80 \text{ s} + 9,82 \text{ s} + 9,83 \text{ s} + 9,87 \text{ s} + 9,88 \text{ s} + 9,90 \text{ s} + 9,92 \text{ s} + 9,93 \text{ s} + 9,95 \text{ s} + 10,03 \text{ s}}{10} \\ &= 9,88363 \text{ s} \end{aligned}$$

For at sætte tal på hvor enige tidtagerne er i deres målinger, udregnes hvor meget hver tidsmåling afviger fra gennemsnittet $(t_1 - \bar{t}), (t_2 - \bar{t}) \dots, (t_{10} - \bar{t})$. Dette anvendes til at udregne standardafvigelsen $s(t)$ som gennemgås i afsnit 2.2.3:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{\frac{(t_1 - \bar{t})^2 + (t_2 - \bar{t})^2 + (t_3 - \bar{t})^2 + \dots + (t_{10} - \bar{t})^2}{10 - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{(9,79 \text{ s} - 9,88363 \text{ s})^2 + (9,80 \text{ s} - 9,88363 \text{ s})^2 + (9,82 \text{ s} - 9,88363 \text{ s})^2 + \dots + (10,03 \text{ s} - 9,88363 \text{ s})^2}{10 - 1}} \\ &= 0,07243 \text{ s} \end{aligned}$$

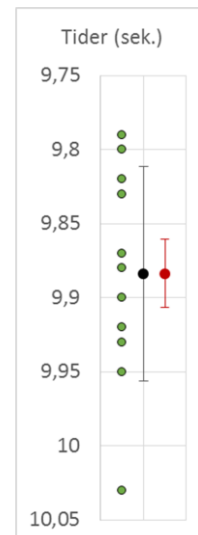
Bemærk at standardafvigelsen s skrives med kursiv, mens enheden for sekunder s ikke skrives i kursiv.

På tidsaksen på Figur 6 er de 10 tidsmålinger angivet med grønne punkter, mens gennemsnittet $\bar{t}$ er angivet med det sorte punkt. Den sorte bjælke angiver plus/minus den udregnede standardafvigelse ($\pm s$). På aksens kan vi se, at tidsmålingen på 10,03 sekunder ligger betydeligt længere fra alle de andre målepunkter. Samtidig kan vi se at det udregnede gennemsnit og standardafvigelse er domineret af de andre værdier som ligger tættere sammen. Under nogle omstændigheder vil punktet på 10,03 sekunder kunne udelukkes, fordi den ligger så langt væk fra de øvrige punkter, men det kan være svært at udelukke at det ikke er en tilfældig (statistisk) berettiget afvigelse. Hvis målepunktet fjernes, skal det dokumenteres, og der skal argumenteres for at det er rimeligt at fjerne det.

For at bestemme hvor stor usikkerheden er på gennemsnittet beregnes standardusikkerheden som i afsnit 2.2.4:

$$u(\bar{t}) = \frac{s(\bar{t})}{\sqrt{n}} = \frac{0,07243 \text{ s}}{\sqrt{10}} = 0,02290$$

Standardusikkerheden er angivet i Figur 6 med den røde usikkerhedsbjælke omkring gennemsnittet $\bar{t}$ for de målte tider. Den fundne standardusikkerhed benyttes i usikkerhedsbudgettet.



Figur 6:
Grøn: Målte tider.
Sort: $\bar{t} \pm s(\bar{t})$
Rød: $\bar{t} \pm u(\bar{t})$

3.1.1 Udregning af den samlede usikkerhed for manuel og elektronisk tidsmåling

De usikkerheder, som blev enten beregnet eller estimeret i Tabel 3, benytter vi nu til at udarbejde et usikkerhedsbudget for den manuelle og elektroniske tidsmåling. Usikkerhedsbudgettet for hver metode ses i Tabel 4. Bemærk at skabelonen i Tabel 1 ikke er benyttet for at holde dette eksempel simpelt. De enkelte kilder til usikkerhed og den talværdi de bidrager med er indsat i tabellen.

Usikkerhederne lægges sammen i kvadratur som i boks 6. For den manuelle tidsmåling fås følgende

Ligning 17:

$$\begin{aligned} u(t_{\text{manuel}}) &= \sqrt{0,0029^2 + 0,002^2 + 0,000001^2 + 0,0229^2} \\ &= 0,02317 \text{ s} \end{aligned}$$

Den samlede usikkerhed for den manuelle og den elektroniske tidsmåling ses i sidste række af Tabel 4.

Resultatet af tidsmålingen kan nu angives som gennemsnittet fundet i regneeksemplet (boks 7), og med de samlede usikkerheder. Dog benytter vi et 95% *konfidensinterval*, hvilket vil sige at usikkerhederne ganges med 2. Det sikrer at den sande værdi med 95% sikkerhed ligger indenfor usikkerhedsintervallet. Dette kaldes for den *ekspanderede usikkerhed*, $U(y)$. Mere herom i afsnit 4.5. Derved bliver resultatet:

$$\begin{aligned} \text{Manuel} \quad t_{\text{manuel}} &= (9,887 \pm 0,046) \text{ s} \\ \text{Elektronisk} \quad t_{\text{elektronisk}} &= (9,8872 \pm 0,0049) \text{ s} \end{aligned}$$

Bemærk at usikkerhederne er vist med to betydende cifre. Det betyder for det manuelle resultat, at der er tre decimaler efter kommaet på usikkerheden, mens der for den elektroniske er fire decimaler. Talværdien for måleresultatet er afrundet til samme antal cifre bag kommaet, som deres respektive usikkerheder. De generelle regler for afrunding og betydende cifre er gennemgået ved hjælp af eksempler i boks 8.

Det gennemgåede eksempel om 100 m løb er for simpelt, og skal mest fungere som en introduktion til begreberne. I det følgende afsnit vil vi mere systematisk

og detaljeret, gennemgå hvordan et usikkerhedsbudget bør stilles op og evt. efterfølgende tilpasses.

Tabel 4: Usikkerhedsbudget for 100 m løb.

Kilde til usikkerheden [enhed]	Usikkerhed Manuelt	Usikkerhed Elektronisk
Løberen (måleemne) [s]	0	0
Stopurets opløsning (måleudstyr) [s]	0,0029	0,0024
Metode [s]	0,002	0,0005
Miljø [s]	0	0
Kalibreringen (reference) [s]	0,000001	0,000001
Tidtagerens reaktion (operatør) [s]	0,0229	0
Samlet usikkerhed [s]	0,02317	0,002452

Boks 8: Betydende cifre

I et måleresultat bør den ekspanderede usikkerhed, $U(y)$ angives med højst to betydende cifre, og resultatets talværdi afrundes derefter.

De to betydende cifre bestemmes ved at kigge på $U(y)$'s decimaler fra venstre og finde de første to decimaler, som er forskellige fra nul. Nedenfor er dette de dobbelt understregede cifre,

0,1748 °C

Det efterfølgende ciffer (med enkelt understregning) anvendes til at lave en passende afrunding til de to betydende cifre. Hvis det efterfølgende ciffer er mindre end 5, beholdes de to cifre som de står (dvs. usikkerheden bliver 0,17 °C). Hvis det efterfølgende ciffer er 5 eller større, så rundes det sidst betydende ciffer op, (dvs. hvis der stod 0,1758 °C så ville afrundingen til to betydende cifre bliver 0,18 °C). Middelværdien for y afrundes til det tilsvarende antal cifre efter kommaet, som usikkerheden er angivet med.

Nogle eksempler på afrunding er givet her:

1. Længden af et objekt er bestemt til 3,69445 cm med en ekspanderet usikkerhed på 3,12 mm, måleresultatet er derfor

FORKERT: $L = (3,7 \text{ cm} \pm 0,31) \text{ cm}$

RIGTIGT: $L = (3,69 \pm 0,31) \text{ cm}$

Den første linje er forkert, fordi usikkerheden er angivet med to betydende cifre efter kommaet og måleværdien kun er angivet med ét ciffer efter kommaet.

2. Bakteriens diameter blev målt til 2,0522 μm ($2 \mu\text{m} = 0,0020522 \text{ mm}$) med en ekspanderet usikkerhed på 0,0613 μm ($0,0613 \mu\text{m} = 0,0000613 \text{ mm}$)

FORKERT: $v = (2,05 \pm 0,06) \mu\text{m}$

RIGTIGT: $v = (2,052 \pm 0,061) \mu\text{m}$

Den første linje er forkert, fordi der er brugt ét betydende ciffer i usikkerheden. Mens anden linje er korrekt idet usikkerheden er afrundet til to betydende cifre. Det skal dog bemærkes at man godt kan vælge kun at afrundet usikkerheden til ét betydende ciffer, i det tilfælde vil første linje være korrekt.

3. Hastigheden af en bilist på en landevej blev bestemt til 134,594 km/t med en ekspanderet usikkerhed på 14,904 km/t. Måleresultatet er derfor

FORKERT: $v = (134,6 \pm 14,9) \text{ km/t}$

RIGTIGT: $v = (135 \pm 15) \text{ km/t}$

Den første linje er forkert, fordi usikkerheden er afrundet til tre betydende cifre i stedet for to. Anden linje er korrekt, idet usikkerheden er afrundet til to betydende cifre.

4 Usikkerhedsbudget for en temperaturmåling

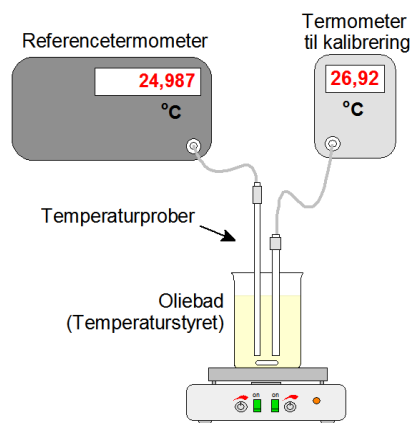
I dette afsnit vil vi gennemgå hvordan et usikkerhedsbudget kan bygges op. Vi vil tage udgangspunkt i en temperaturmåling. Først vil et simpelt usikkerhedsbudget opstilles hvor kun usikkerheden fra (1) kalibrering og (2) spredning fra gentagende målinger medtages. Derudover vil vi opstille en *korrektionsfunktion* som benyttes til at korrigere de måleværdier som aflæses fra termometeret. Til sidst vil vi, med udgangspunkt i måleteknikkens sekstakkede stjerne, se på hvilke andre kilder til usikkerhed der kan være på en temperaturmåling.

4.1 Kalibrering af et termometer

Temperaturen er ofte en vigtig målestørrelse at måle for at sikre stabilitet i industrielle faciliteter og laboratorier. For at sikre, at de målte temperaturer er sammenlignelige ved brug af forskellige termometre og over tid, er det nødvendigt at termometrene er kalibreret op imod samme reference. For at sikre sporbarhed skal denne reference være sporbar til SI systemet (Kelvin).

Et elektronisk termometer er blevet sendt til kalibrering hos et akkrediteret laboratorium. Laboratoriet har udført en kalibrering i området fra 15 °C til 35 °C. Kalibreringen er udført ved at lade det indsendte termometer måle på et emne. I dette tilfælde er emnet et temperaturstyret oliebad som vist på Figur 7. Samme oliebad er ligeledes målt med referencelaboratoriets referencetermometer, så målingerne kan sammenlignes.

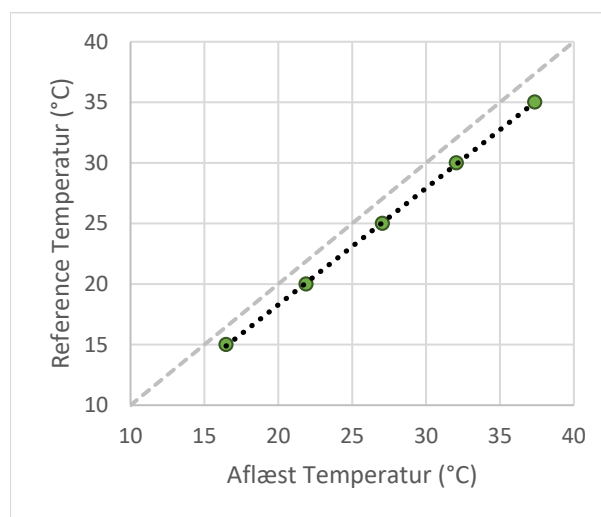
Kalibreringen er udført ved fem forskellige temperaturer. Ved hver temperatur er der foretaget gentagende målinger som grundlag for at kunne bestemme en standardusikkerhed på samme måde som i regneeksemplet for tidtagning (boks 7).



Figur 7: Opstilling ved kalibrering af termometeret. Referencelaboratoriets referencetermometer og det indsendte termometer måler temperaturen i det samme temperaturstyrede oliebad. Temperaturer målt med referencetermometeret kaldes i eksemplet T_{ref} , mens temperaturer målt med det indsendte termometer er benævnt $T_{aflæst}$.

Tabel 5: Måleværdier og standardusikkerhed fra kalibrering af termometer.

T_{ref}	$\pm u(T_{ref})$	$T_{aflæst}$	$\pm u(T_{aflæst})$
14,993	$\pm 0,022$	16,470	$\pm 0,127$
19,991	$\pm 0,013$	21,890	$\pm 0,079$
24,993	$\pm 0,005$	27,060	$\pm 0,242$
29,991	$\pm 0,023$	32,060	$\pm 0,254$
35,007	$\pm 0,015$	37,360	$\pm 0,117$



Figur 8: Målepunkter fra kalibrering. Den sortprikkede linje er en regression for en ret linje til målepunkterne. Den gråstiplede linje er $y = x$, dvs. der hvor punkterne burde ligge, hvis termometer og reference termometer måler ens.

Tabel 6: Konstanterne α og β er fundet ved lineær regression over målepunkterne i Figur 8.

Symbol	Beskrivelse	Enhed	$\bar{x}$	$\pm$	$u(x_i)$
α	Funktionens hældning	°C/°C	0,963	$\pm$	0,007
β	Funktionens skæringspunkt	°C	-0,971	$\pm$	0,200

I Tabel 5 er der opstillet et tænkt resultat for kalibreringen. I søjlerne angives middelværdien af de gentagne målinger ved hver temperatur for både referencetermometeret, T_{ref} , og det indsendte termometer, $T_{\text{aflæst}}$. Derudover vises $u(T_{\text{ref}})$ og $u(T_{\text{aflæst}})$ som er standardusikkerhederne for henholdsvis referencetermometeret og det indsendte termometer.

På Figur 8 ses en graf, hvor x-aksen viser temperaturen aflæst med det indsendte termometer ($T_{\text{aflæst}}$), og y-aksen viser temperaturen målt med referencen (T_{ref}) ved de fem forskellige indstillede temperaturer for oliebadet. De målte temperaturer for henholdsvis termometer og referencetermometer, som angivet i Tabel 5, er indtegnet på grafen. Den gråstiplede linje angiver hvordan målepunkterne skulle ligge hvis termometeret og reference-termometeret viste præcis samme værdier. Dette er dog ikke tilfældet i eksemplet her. Temperaturerne aflæst med termometeret har højere værdier (ligger længere til højre) end de tilsvarende aflæsninger på referencetermometeret.

Fejlen er ikke den samme ved alle temperaturer. Termometeret viser mere for højt ved høje temperaturer end ved de lavere (punkterne ligger længere til højre ved højere temperaturer). Der er derfor både en fejl på skaleringen (hældning) og nulpunktet (skæringspunkt), som der skal korrigeres for.

Målepunkterne ligger forholdsvis pænt på en ret linje (den sortprikkede linje). Funktionen for en ret linje ($y = a \cdot x + b$, se boks 2) kan derfor bruges til at repræsentere omregningen fra en temperatur aflæst på termometeret til den tilsvarende temperatur aflæst på referencetermometeret. Modelfunktionen ser således ud

Ligning 18:

$$T_{\text{ref}} = \alpha \cdot T_{\text{aflæst}} + \beta$$

hvor α og β står for henholdsvis hældning og skæringspunkt. Talværdien af α og β bestemmes ved at tilpasse, eller "fitte", med lineær regression.

Modelfunktionen T_{ref} fortæller, hvor meget termometeret måler forkert, og hvordan en temperatur målt med termometeret kan omregnes (korrigeres) til en værdi, der svarer til, hvad referencetermometeret ville måle. Således kan det sikres, at målinger udført med termometeret kan sammenlignes med andre temperaturmålinger, som også er blevet kalibreret op imod referencetermometeret. Hvis referencetermometeret yderligere er kalibreret til en SI-sporbar reference, så kan temperaturmålingerne sammenlignes med alle SI-sporbare temperaturmålinger. Ligning 18 kan derfor også kaldes for en *korrektionsfunktion*.

Konstanterne α og β findes ved at udføre en lineær regression (fitning) på målepunkterne i grafen på Figur 8 (sort prikkede linje). Den lineære regression kan foretages i Excel eller et andet regneprogram. Endvidere kan man beregne hvor godt konstanterne α og β er bestemt i den lineære regression. Hvordan dette gøres i Excel er gennemgået i bilaget til dette undervisningselement – "Bilag A3 Lineær regression med LINEST". Her vil vi blot gengive resultatet af regressionen, hvilket ses i Tabel 6.

4.2 Korrektur af målinger

Når en temperaturmåling udføres med termometeret, er man interesseret i at omregne denne værdi til en korrigeret værdi, som svarer til hvad referencetermometeret ville måle. Derved sikres, at det er en mere korrekt temperatur som måles.

Lad os sige, at 8 målinger ved den samme temperatur er foretaget som vist i Tabel 8. De aflæste værdier fra termometeret er kaldet $T_{\text{aflæst}}$. Ud fra disse målinger

Tabel 7: Usikkerhedsbudget for en korrigeret temperaturmåling. Medtaget er usikkerheden fra kalibreringen og spredningen på de 8 målinger.

Symbol x	Målestørrelse	Enhed	Værdi $\bar{x}$	Usikkerhed $u(x)$	Usikkerhedsbidrag $u_x(T_k) / ^\circ\text{C}$	Værdi ved $\bar{T}_{k,u(x)}$
α	Funktionens hældning	$^\circ\text{C}/^\circ\text{C}$	0,963	0,0071	0,1660	21,5763
β	Funktionens skæringspunkt	$^\circ\text{C}$	-0,971	0,1996	0,1996	21,6099
$T_{\text{aflæst}}$	Temperatur målt med termometeret (spredning)	$^\circ\text{C}$	23,245	0,0719	0,0692	21,4795
T_k	Korrigeret temperatur	$^\circ\text{C}$	21,4103	0,2687	0,2687	
Modelfunktion: $T_k = \alpha \cdot T_{\text{aflæst}} + \beta$						

er en middelværdi ($\bar{T}$: *middel*, boks 3), standardafvigelse ($s(T)$: *standardafvigelse*, boks 4) og standardusikkerhed ($u(\bar{T})$: *usikkerhed*, boks 5) blevet udregnet. Således at

$$T_{\text{aflæst}} = (23,245 \pm 0,072) ^\circ\text{C}.$$

Når $T_{\text{aflæst}}$ skal sammenlignes med andre målinger, som er foretaget med andre termometre, er det ikke, hvad termometeret angiver, der er relevant, men den korrigerede måleværdi T_k .

Tabel 8: Temperaturer aflæst på termometeret $T_{\text{aflæst}}$ og tilhørende korrigerede temperaturer T_k . For hver søjle af 8 måleværdier er der udregnet: middelværdi, standardafvigelse og standardusikkerhed.

	$T_{\text{aflæst}}$	T_k
1	23,30	21,463
2	23,47	21,627
3	22,94	21,117
4	23,00	21,174
5	23,22	21,386
6	23,27	21,434
7	23,53	21,685
8	23,23	21,396
$\bar{T}$: <i>middel</i>	23,245	21,4103
$s(T)$: <i>standardafvigelse</i>	0,203	0,196
$u(T)$: <i>usikkerhed</i>	0,0719	0,069

T_k udregnes ved brug af Ligning 18. dvs.

$$T_k = \alpha \cdot T_{\text{aflæst}} + \beta$$

α , β og $T_{\text{aflæst}}$ betegnes som inputstørrelser og T_k som outputstørrelse.

Indsættes middelværdien for $\bar{T}_{\text{aflæst}}$, og α og β værdierne fra Tabel 6, får man

Ligning 19:

$$\begin{aligned}\bar{T}_k &= \bar{\alpha} \cdot \bar{T}_{\text{aflæst}} + \bar{\beta} \\ &= 0,963 \cdot 23,245 - 0,971 = 21,4103 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Det vil sige at den korrigerede temperatur er 21,4103 $^\circ\text{C}$.

I Tabel 8 i 3. søjle ses den korrigerede måleværdi T_k , udregnet på samme måde, som i Ligning 19, for hver af de 8 målepunkter.

Middelværdi og standardafvigelse for de korrigerede måleværdier er også udregnet for de individuelt korrigerede temperatur-aflæsninger. De fremgår af Tabel 8. Sammenlignes værdien for den korrigerede middelværdi (Ligning 19) med middelværdien af de individuelt korrigerede temperaturer i Tabel 8, ses, at de begge er 21,4103 $^\circ\text{C}$, og der er således konsistens.

En standardafvigelse kan også udregnes for de individuelt korrigerede værdier. Men at udregne usikkerheden for de korrigerede temperaturer ved hjælp af udelukkende standardafvigelsen vil være *forkert*. Der skal også tages højde for usikkerhedsbidragene fra de

to kalibreringsfaktorer α og β . Usikkerheden er derfor streget ud i Tabel 8. I næste afsnit vil vi beregne usikkerheden på den korrigerede temperatur.

4.3 Udregning af usikkerhed for den korrigerede temperatur

For at udregne usikkerheden på den korrigerede temperatur, T_k kan et usikkerhedsbudget opstilles som i Tabel 7. Fra venstre mod højre indeholder søjlerne: 1. symbol for inputstørrelsen, 2. beskrivelse af inputstørrelsen, 3. enhed for inputstørrelsen, 4. middelværdien for inputstørrelsen, 5. standardusikkerheden for inputstørrelsen, 6. usikkerhedsbidraget til den korrigerede temperatur fra hver af kilderne til usikkerhed. Usikkerhedsbidraget fortæller hvor meget den enkelte inputstørrelse bidrager til usikkerheden på outputstørrelsen, T_k . Den 7. søjle vender vi tilbage til i afsnit 4.4

Kilderne til usikkerhed som er medtaget i dette usikkerhedsbudget er α og β , og spredningen på målingerne, $T_{\text{aflæst}}$. Dette er de tre inputstørrelser.

Den samlede usikkerhed for T_k udregnes ved at lægge alle usikkerhedsbidragene sammen. Her benyttes reglen fra boks 6 for sum af usikkerheder. Usikkerhedsbidragene er vist i 6. søjlen i Tabel 7.

$$\begin{aligned} u(T_k) &= \sqrt{u_\alpha(T_k)^2 + u_\beta(T_k)^2 + u_{T_{\text{aflæst}}}(T_k)^2} \\ &= \sqrt{(0,1660)^2 + (0,1996)^2 + (0,0692)^2} \\ &= 0,2687 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Dette er den samlede usikkerhed på T_k . I afsnit 4.4 vises, hvordan de enkelte usikkerhedsbidragene udregnes.

4.3.1 Overvejelser ud fra størrelserne på usikkerhedsbidragene

Ud fra usikkerhedsbidragene kan man vurdere, hvilke af kilderne der bidrager mest til resultatets usikkerhed. I 6. søjle af Tabel 7, kan vi se at usikkerhedsbidragene fra α og β bidrager med hhv. 0,1660 $^\circ\text{C}$ og 0,1996 $^\circ\text{C}$ som næsten er sammenlignelige, mens

$T_{\text{aflæst}}$ kun bidrager med 0,0692 $^\circ\text{C}$ som er væsentlige mindre.

Hvis temperaturmålingen havde været endnu bedre (lille $u(T_{\text{aflæst}})$), ville usikkerheden på den korrigerede temperatur T_k så blive tilsvarende bedre? Nej det vil den ikke, for usikkerhedsbidraget fra α og β vil stadig bidrage med deres henholdsvis usikkerhedsbidrag på ca. 0,2 $^\circ\text{C}$.

Hvis for eksempel $T_{\text{aflæst}}$ kun havde en standardusikkerhed på 0,005 $^\circ\text{C}$ i stedet for 0,0692 $^\circ\text{C}$, så ville usikkerheden blive

$$u(T_k) = \sqrt{(0,1660)^2 + (0,1996)^2 + (0,005)^2} = 0,2597 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Havde usikkerheden derimod være større, f.eks. $u(T_{\text{aflæst}}) = 1,5 \text{ }^\circ\text{C}$ for den aflæste temperatur, så ville dette blive det dominerende bidrag idet

$$u(T_k) = \sqrt{(0,1660)^2 + (0,1996)^2 + (1,5)^2} = 1,5223 \text{ }^\circ\text{C}.$$

En tilsvarende undersøgelse kan omvendt bruges til at bestemme, hvor god en kalibrering der er nødvendig til et termometer med en given stabilitet.

Usikkerhedsbidragene giver en god indikation på hvilke bidrag der er dominerende, og derved hvor man ville kunne vinde mest ved at forsøge at sænke bidraget. Som det ses af udregningerne ovenfor ville man ikke få en markant lavere usikkerhed ved at mindske $u(T_{\text{aflæst}})$.

Der skal dog også altid økonomiske overvejelser med i billedet. Hvis omkostningerne ved at sænke et usikkerhedsbidrag er for store, er det ikke sikkert at det giver mening at gennemføre.

4.4 Udregning af de individuelle usikkerhedsbidrag

Usikkerhedsbidragene $u_x(T_k)$ i Tabel 7, 6. søjle, fortæller hvor meget den enkelte inputstørrelse bidrager til usikkerheden på outputstørrelsen, T_k . I dette afsnit gennemgår vi, hvordan usikkerhedsbidragene udregnes.

Usikkerhedsbidragene fra de enkelte inputstørrelser x udregnes ved at bestemme, hvor meget outputstørrelsen T_k ændrer sig, når den enkelte inputstørrelse ændres med dens egen standardusikkerhed.

Det vil sige, at bidraget fra inputstørrelsen, x bestemmes ved at ændre værdien fra inputstørrelsens midelværdi $\bar{x}$, til middelværdien *plus* dens egen usikkerhed dvs. $\bar{x} + u(x)$. Denne værdi vil vi kalde $\bar{T}_{k,u(x)}$. Med andre ord, udregnes, hvad værdien for T_k vil være, hvis den måles i $\bar{x} + u(x)$.

Usikkerhedsbidraget bestemmes da ved forskellen (differensen) $\bar{T}_{k,u(x)} - \bar{T}_k$ og benævnes $u_x(T_k)$.

I nærværende temperatureksempel er der tre inputstørrelser α, β og $T_{\text{aflæst}}$. De indgår i modelfunktionen fra Tabel 7

$$T_k = \alpha \cdot T_{\text{aflæst}} + \beta$$

Ved at indsætte talværdier for α, β og $T_{\text{aflæst}}$ i modelfunktionen fås outputstørrelsen T_k .

Hver ændring af de enkelte inputstørrelser med $u(x)$ vil resultere i at også outputstørrelsen, T_k ændres.

Med andre ord udskiftes hver inputstørrelse enkeltvis med følgende:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &\rightarrow \bar{\alpha} + u(\bar{\alpha}) \\ \bar{\beta} &\rightarrow \bar{\beta} + u(\bar{\beta}) \\ \bar{T}_{\text{aflæst}} &\rightarrow \bar{T}_{\text{aflæst}} + u(\bar{T}_{\text{aflæst}})\end{aligned}$$

Hvorved en ny T_k bestemmes for hver udskiftning.

For hældningen α fås

$$\begin{aligned}\bar{T}_{k,u(\alpha)} &= (\bar{\alpha} + u(\bar{\alpha})) \cdot \bar{T}_{\text{aflæst}} + \bar{\beta} \\ &= ((0,963 + 0,007) \cdot 23,245 - 0,971) ^\circ\text{C} \\ &= 21,5763 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

For skæringspunktet β fås at, når det ændres fra $\bar{\beta}$ værdien til $\bar{\beta} + u(\bar{\beta})$ bliver modelfunktionens værdi (outputstørrelse)

$$\begin{aligned}\bar{T}_{k,u(\beta)} &= \bar{\alpha} \cdot \bar{T}_{\text{aflæst}} + (\bar{\beta} + u(\bar{\beta})) \\ &= (0,963 \cdot 23,245 + (-0,971 + 0,1996)) ^\circ\text{C} \\ &= 21,6099 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

For $T_{\text{aflæst}}$ fås at ændringen fra $\bar{T}_{\text{aflæst}}$ til $\bar{T}_{\text{aflæst}} + u(\bar{T}_{\text{aflæst}})$ giver en ændring i outputstørrelsen til

$$\begin{aligned}\bar{T}_{k,u(T_{\text{aflæst}})} &= \bar{\alpha} \cdot (\bar{T}_{\text{aflæst}} + u(\bar{T}_{\text{aflæst}})) + \bar{\beta} \\ &= (0,963 \cdot (23,245 + 0,072) - 0,971) ^\circ\text{C} \\ &= 21,4795 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

De udregnede værdier indsættes så i 7. søjle i Tabel 7.

Usikkerhedsbidragene fra hver af inputstørrelserne kan nu udregnes ved at benytte følgende

Ligning 20:

$$u_x(T_k) = \bar{T}_{k,u(x)} - \bar{T}_k$$

$$\begin{aligned}u_\alpha(T_k) &= \bar{T}_{k,u(\alpha)} - \bar{T}_k = (21,5763 - 21,4103) ^\circ\text{C} \\ &= 0,1660 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_\beta(T_k) &= \bar{T}_{k,u(\beta)} - \bar{T}_k = (21,6099 - 21,4103) ^\circ\text{C} \\ &= 0,1996 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{T_{\text{aflæst}}}(T_k) &= \bar{T}_{k,u(T_{\text{aflæst}})} - \bar{T}_k \\ &= (21,4795 - 21,4103) ^\circ\text{C} \\ &= 0,0692 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Den samlede usikkerhed for T_k udregnes ved at anvende regnereglen for sum af usikkerheder (boks 6). Således fås

$$\begin{aligned}u(T_k) &= \sqrt{u_\alpha(T_k)^2 + u_\beta(T_k)^2 + u_{T_{\text{aflæst}}}(T_k)^2} \\ &= \sqrt{(0,1660)^2 + (0,1996)^2 + (0,0692)^2} \\ &= \sqrt{0,0276 + 0,0398 + 0,00479} \\ &= 0,2687 ^\circ\text{C}\end{aligned}$$

De udregnede individuelle usikkerhedsbidrag kan nu tilføjes til 6. søjle i Tabel 7 for usikkerhedsbudgettet. Derudover kan den samlede usikkerhed på T_k også tilføjes.

Usikkerheden på temperaturmålingen kunne også være fundet ved at anvende regnereglerne fra boks 6 på modelfunktionen. Idet modelfunktionen indeholder både en addition og et produkt kræver dette dog lidt matematisk gymnastik. En gennemgang af denne

metode kan findes i appendix'et. I dette tilfælde resultere denne metode i samme usikkerhed på T_k som den fundet ovenfor.

4.5 Angivelse af et måleresultat

Som nævnt i kompendiet A1 - *Introduktion til målinger* skal et måleresultat angives med passende afrunding og på formen

$$y \pm U(y)$$

hvor $U(y)$ er den *ekspanderede usikkerhed* for y .

Indtil videre har vi i afsnit 4 kun anvendt standardusikkerheden $u(\bar{y})$. Denne er relateret til den ekspanderede usikkerhed ved forholdet

$$U(y) = k \cdot u(\bar{y})$$

hvor k er et helt tal som kaldes *dækningsfaktoren*. Størrelsen af dækningsfaktoren k angiver med hvor stor sikkerhed værdien af den målte størrelse ligger inden for intervallet $y - U(y)$ til $y + U(y)$.

Hvis f.eks. $k = 2$ vil det betyde at målestørrelsens værdi med 95 % sandsynlighed ligger indenfor intervallet $y - U(y)$ til $y + U(y)$. Eller omvendt, at der er 5 % sandsynlighed for at målestørrelsens værdi *ikke* ligger i intervallet. Man siger i tilfældet $k = 2$ at *dækningssandsynligheden* er på 95 %.

I Tabel 9 er angivet tre dækningsfaktorer og de tilhørende dækningssandsynligheder, man får ved at benytte den pågældende dækningsfaktor.

Jo større dækningsfaktor man bruger, desto større bliver dækningssandsynligheden. Med en større dækningsfaktor er der større sandsynlighed for, at den sande værdi ligger indenfor det interval, som den ekspanderede usikkerhed angiver. Dette skyldes, at når en større konstant k ganges på $u(\bar{y})$, vil den ekspanderede usikkerhed blive tilsvarende større, og derved er intervallet omkring måleværdien større.

NB: Når man opstiller usikkerhedsbudgetter anvendes der altid $k = 1$, dvs. $u(\bar{y})$. Dækningsfaktoren ganges på som det sidste. Det endelige resultat angives således med den ekspanderede usikkerhed $U(y)$.

Dækningsfaktor, k	Dækningssandsynlighed
1	68 %
2	95 %
3	99 %

Tabel 9: Udvalgte dækningsfaktorer og tilhørende dækningssandsynlighed (kaldes også for *konfidensinterval*).

For at udregne $U(y)$ anvendes ofte $k = 2$, således at den ekspanderede usikkerhed er $U(y) = 2 \cdot u(\bar{y})$. I temperatureksemplet fås således måleresultatet

$$T_k = \bar{T}_k \pm 2 \cdot u(\bar{T}_k) = (21,4103 \text{ °C} \pm 2 \cdot 0,2687 \text{ °C}) = (21,41 \pm 0,54) \text{ °C}$$

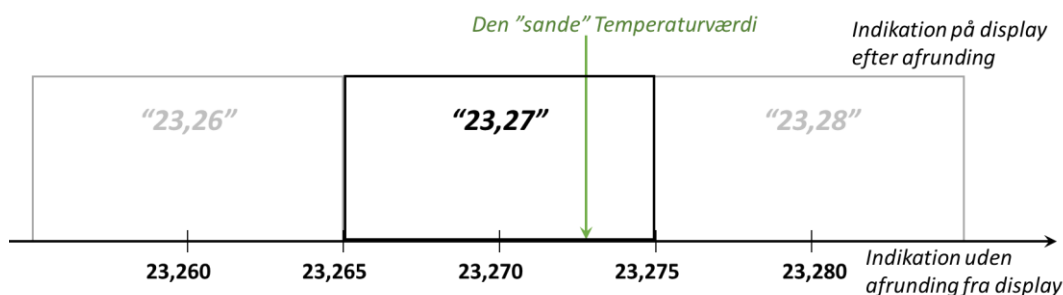
Resultatet er blevet afrundet til to betydende cifre på den ekspanderede usikkerhed, derfor er måleværdien angivet med to decimaler efter kommaet (se boks 8).

4.6 Øvrige kilder til usikkerhed på temperaturmålingen

I det ovenstående temperatureksempel er der kun taget højde for (1) usikkerhedsbidraget fra spredningen på aflæsningen af termometeret, og (2) usikkerhedsbidraget fra kalibreringen. Men når termometeret anvendes til at måle på et emne, kan der imidlertid være øvrige kilder til usikkerhed, som også bør inkluderes.

For at vurdere hvilke kilder der kan være, kan vi gennemgå måleteknikkens sekstakkede stjerne over kilder til usikkerhed:

1. **Måleemnet:** Termometeret kan kun måle temperaturen et sted på måleemnet. Dette sted er måske ikke repræsentativt for temperaturen andre steder på måleemnet. Man siger, at der kan være en *temperaturgradient*.
2. **Referencen:** Bidraget fra referencen er allerede gennemgået ovenfor i form af kalibreringen (α og β).
3. **Måleudstyr:** Termometeret har et *skalainterval* på 0,01 °C. Dette Skalainterval giver anledning til en usikkerhed. Derudover kan termometerets strømforsyning (f.eks. batteri)



Figur 9: Termometeret viser en temperatur på 23,27 °C. Intervallet fra 23,265 °C til 23,274 °C giver anledning til samme visning.

- tabe effekt og give en ændring i den aflæste temperatur.
4. **Målemetode:** I etablering af den termiske kontakt mellem termometer og måleemne anvendes der f.eks. varmeledende creme (kaldet termopasta). Dette kan være afgørende for den aflæste temperatur, især hvis det er et fast emne der måles på. Navnlig kan etableringen af kontakten variere fra gang til gang.
 5. **Miljø:** Variation i omgivelsernes temperatur omkring opstillingen under måling med termometeret kan påvirke temperatur aflæsningen. Ligeledes kan fugt påvirke temperaturmålingen.
 6. **Operatøren:** Er operatøren ikke konsekvent ved etableringen af den termiske kontakt kan dette ligeledes påvirke målingen.

Det er en omfattende opgave at gå ind i alle kilderne fra måleteknikkens sekstakkede stjerne og bestemme alle usikkerhedsbidrag. Så i de følgende udregninger gennemgår vi derfor kun bidraget fra (1) termometerets skalainterval (måleudstyret), og (2) den termiske variation over måleemnet (måleemnet).

4.6.1 Skalainterval

Termometeret har et skalainterval på 0,01 °C. Den viser 23,27 °C. *Skalaintervallet* angiver den mindste ændring som termometeret kan vise. Skalaintervallet sætter således en begrænsning på hvor præcist temperaturen kan bestemmes. Vi ved f.eks. ikke om temperaturen er 23,272 °C eller 23,274 °C på baggrund af målingen.

De temperaturer der kan give anledning til en visning på 23,27 °C ligger i intervallet fra 23,265 °C til 23,274 °C. Ved afrunding af tallene i dette interval vil man ende op med 23,27 °C. Se Figur 9 for en illustration af dette.

Det er lige sandsynligt hvor i intervallet fra 23,265 til 23,274 °C temperaturen reelt er. For at udregne standardusikkerheden for denne usikkerhedskilde skal man anvende sandsynlighedsregning. Dette vil ikke blive gennemgået her. Men resultatet er at for at udregne standardusikkerheden skal skalaintervallet divideres med $2\sqrt{3}$. Dette kaldes for en *rektangulær fordeling*.

Det betyder at standardusikkerheden for skalaintervallet på termometeret kan beregnes til

$$\delta T_{dig} = \frac{0,01 \text{ °C}}{2\sqrt{3}} = 0,0029 \text{ °C}$$

Det vil sige at denne kilde har en usikkerhed på $\pm 0,0029 \text{ °C}$.

4.6.2 Temperaturgradient

For at vurdere usikkerhedsbidraget fra den termiske variation over måleemnet vil det typisk være nødvendigt at lave et studie, hvor der måles flere steder på måleemnet samtidig. Fra et sådant studie kan det bestemmes hvor meget de målte temperaturer er forskellige. I et sådant studie har man fundet frem til at de termiske gradienter over måleemnet bidrager med en standardusikkerhed på $u(dT_{grad}) = 0,223 \text{ °C}$.

4.6.3 Det reviderede usikkerhedsbudget

I Tabel 10 ses det opdaterede usikkerhedsbudget for temperaturmålingen, hvor de to bidrag fra termometerets skalainterval, og temperaturgradienten over måleemnet er medtaget.

Bemærk, at skalainterval og den termiske gradient ikke påvirker outputstørrelsen T_k . Derfor er der angivet et 0 i søjlen "Værdi". Men de påvirker usikkerheden på målingen.

Usikkerheden på T_k , med de to ekstra kilder til usikkerhed inkluderet, beregnes på samme måde som i afsnit 4.4.

I Tabel 10 ses at standardusikkerheden for T_k nu er 0,3487 °C. Den ekspanderede usikkerhed udregnes da ved

$$U(T_k) = 2 \cdot u(T_k) = 2 \cdot 0,3487 \text{ °C} = 0,6974 \text{ °C}.$$

Så det reviderede måleresultat er nu

$$T_k = (21,41 \pm 0,70) \text{ °C}$$

Ved at inkludere usikkerhederne fra skalaintervallet på visningen og den termiske gradient steg den rapporterede ekspanderede usikkerhed med 0,16 °C.

Ved at kigge på tallene i 6. søjle for "usikkerhedsbidrag" i Tabel 10 ses det, at opløsningen kun bidrager med 0,0028 °C til usikkerheden. Det er meget lavt i forhold til de andre bidrag, og derved et ubetydeligt bidrag. Det betyder, at usikkerheden på temperaturmålingen ikke ville blive bedre hvis man havde brugt et termometer som kunne vise med tre decimaler efter kommaet (dvs. have et skalainterval på 0,001 °C) i stedet for to decimaler. Dette er væsentlige overvejelser idet et termometer med en skalainterval på 0,001 °C muligvis vil være dyrere end et med en skalainterval på 0,01 °C. Så ved at opstille usikkerhedsbudgettet kan man finde ud af at man ikke behøver investere i det dyrere termometer for at forbedre usikkerheden på temperaturmålingen.

Tabel 10: Usikkerhedsbudget for en temperaturmåling, hvor bidraget til usikkerheden fra termometerets skalainterval (δT_{dig}) og temperaturvariationer over måleemnet, (δT_{grad}) er medregnet.

Symbol x	Målestørrelse	Enhed	Værdi $\bar{x}$	Usikkerhed $u(x)$	Usikkerhedsbidrag $u_x(T_k)$
α	Funktionens hældning	°C/°C	0,963	0,0071	0,1660
β	Funktionens skæringspunkt	°C	-0,971	0,1996	0,1996
$T_{aflæst}$	Temperatur målt med sensor	°C	23,245	0,0719	0,0692
δT_{dig}	Opløsning på termometer	°C	0	0,0029	0,0028
δT_{grad}	Termiske gradienter over måleemnet	°C	0	0,223	0,2230
T_k	Korrigeret temperatur	°C	21,4103	0,3487	0,3487
Modelfunktion: $T_k = \alpha \cdot (T_{aflæst} + \delta T_{dig}) + \beta + \delta T_{grad}$					

5 Generel fremgangsmåde

Alle målinger er forskellige. Det er derfor vanskeligt at opstille et usikkerhedsbudget, som kan bruges til alle typer målinger. Derimod er det muligt altid at bruge den samme fremgangsmåde til at opstille usikkerhedsbudgetter. Nedenfor er givet seks trin, som man altid bør gå igennem, når man opstiller et usikkerhedsbudget.

1. Ved du hvilken målestørrelse, der skal måles? Og har du et estimat af talværdien? Hvis du f.eks. ønsker at måle på en stikkontakt (el-udtag i Danmark har typisk 230 Volts vekselspænding), så er det sandsynligvis et multimeter du skal anvende til f.eks. at bestemme vekselspændingen, eller eventuelt vekselstrømmens frekvens.
2. Overvej hvilke fejlkilder der kan påvirke målingen. Brug måleteknikkens sekstakkede stjerne:
 - a. Måleemnet
 - b. Måleudstyret
 - c. Målemetoden
 - d. Miljøet
 - e. Referencen
 - f. Operatøren
3. Forsøg at give et bud på størrelsen af den usikkerhed, som hver enkelt fejlkilde bidrager med.
 - a. Hvis et bidrag er meget mindre end de andre, kan det udelades for at forsimple usikkerhedsbudgettet så det er lettere at beregne.
4. Foretag yderligere målinger, som kan hjælpe til at bestemme en fejlkildes bidrag til usikkerheden. Dette kan være at teste noget måleudstyr på en

kendt reference eller sende det til et kalibreringslaboratorium. Det kan også være at teste forskellige målemetoder for at se hvilken der giver det bedste resultat.

5. Udfør de nødvendige beregninger for at bestemme talværdien af fejlkildernes bidrag. Det kan f.eks. være at udregne standardafvigelsen, og dernæst standardusikkerheden, ud fra et antal gentagende målinger.
6. Opstil en modelfunktion, der kæder alle usikkerhedskilderne (inputstørrelser) sammen med talværdien af den målte målestørrelse (outputstørrelse).

De mulige kilder til usikkerhed for en given måling kan ofte findes beskrevet i standarder, såsom ISO standarderne, European Accreditation (EA) standarder, eller udgivelser fra nationale metrologiinstitutioner. I de tilfælde hvor en måling ikke er beskrevet i en standard, er det operatørens egen opgave at finde en fornuftig tilgang til at bestemme alle kilderne, og derved den samlede usikkerhed.

Hvis talværdierne for nogle af bidragene ikke umiddelbart er kendt, bliver det en opgave at estimere usikkerheden på målingen. Man må aldrig underestimere en usikkerhed, da det kan føre til at der godkendes produkter, der ikke overholder specifikationer. Det er også problematisk at overestimere et usikkerhedsbidrag, da usikkerheden kan blive så høj, at målingen ikke kan bruges. Derfor er det vigtigt at have godt kendskab til måleteknik for hverken at estimere for højt eller lavt på en måling.

6 Opsummering

I dette kompendie er usikkerhedsbudgetter blevet introduceret igennem to eksempler: tidsmåling af 100 m sprint og måling af temperatur.

For at opstille et usikkerhedsbudget skal man først identificere, hvad der skal måles. Dernæst identificeres de forskellige kilder til usikkerhed, som kan påvirke målingen. Til dette kan måleteknikkens sekstakede stjerne benyttes. Stjernen indeholder nogle af de kilder, som oftest bidrager til usikkerheden på en måling, f.eks. operatør og miljø. En modelfunktion opstilles, og de identificerede usikkerhedskilder inkluderes.

Dernæst sættes der tal på størrelsen af hvert usikkerhedsbidrag. Størrelsen kan bestemmes enten ved at foretage flere målinger eller benytte manualer eller standarder. Når talværdien af alle de vigtigste bidrag er fundet, benyttes de specielle regneregler for usikkerheder til at beregne den samlede usikkerhed på målingen.

Når et usikkerhedsbudget opstilles, kan man inkludere mange forskellige kilder til usikkerhed, og usikkerhedsbudgettet kan derfor godt blive meget komplicerede. Det kan også være både svært og tidskrævende at finde en talværdi for alle usikkerhedsbidrag. Derfor skal man altid overveje, om det er besværet værd at medtage en usikkerhedskilde i forhold til, hvor stort dets bidrag er til den samlede usikkerhed.

Et usikkerhedsbudget har forskellige formål. For det første kan et usikkerhedsbudget bruges til at finde den samlede usikkerhed på en måling, fordi man medtager alle kilder til usikkerhed. Usikkerhedsbudgettet bruges også til at bestemme, hvilken kilde som bidrager med den største usikkerhed. Hvis den samlede usikkerhed viser sig at være for stor i forhold til, hvad der ønskes, så kan man forsøge at gøre det største usikkerhedsbidrag mindre. Det er også væsentligt at have et usikkerhedsbudget, hvis en måling skal sammenlignes med andres målinger af den samme målestørrelse.

Det kan være svært at sammenligne to målinger, hvis der *ikke* er et usikkerhedsbudget til at vise, hvor præcis og nøjagtig målingen var.

7 Ordliste

Begreb	Forklaring	Afsnit
Dækningsfaktoren, k	En faktor som ganges på standardusikkerheden for at få en ekspanderet måleusikkerhed, $U(y)$.	4.5
Dækningssandsynlighed	Angiver med hvor stor sandsynlighed en værdi af en målt størrelse ligger inden for intervallet $y - U(y)$ til $y + U(y)$. Dette kunne f.eks. være med 95% sandsynlighed. Kaldes også for konfidensinterval.	4.5
Inputstørrelse, x_n	En størrelse som måleresultatet afhænger af og som medtages i et usikkerhedsbudget.	1.1, 4
Konfidensinterval	Se dækningssandsynlighed.	4.5
Korrektionsfunktion	Funktion som bestemmes ved en kalibrering og som benyttes til at korrigere måleværdier.	4.1
Korrigeret måleværdi	Måleværdien korrigeres i forhold til en reference værdi. Dette sikre sammenlignelighed med andre målinger.	4.2
Modelfunktion	Matematisk udtryk, der beskriver sammenhængen mellem to eller flere målestørrelser. Med andre ord viser modelfunktionen sammenhængen mellem inputstørrelserne. Resultatet af modelfunktion giver outputstørrelsen.	2.1
Måleresultat	Består af en måleværdi, enhed og måleusikkerhed. $y \pm U(y)$	4.5
Målestørrelse	Den størrelse som måles.	1
Outputstørrelse, y	Resultatet af en måling beregnet ud fra inputestimater i en modelfunktion.	1.1, 4
Standardafvigelse	Spredningen af målingerne, altså hvor tæt de enkelte målinger ligger på gennemsnittet.	2.2.3
Standardusikkerhed	Spredningen på middelværdien.	2.2.4
Usikkerhedsbidrag	Fortæller hvor meget den enkelte inputstørrelse bidrager til usikkerheden på outputstørrelsen.	4.3, 4.4

8 Litteraturliste

[1] DANAK-akkrediteringsbestemmelse, "Måleusikkerhed i kalibrering", nr. AB11, 2011-12-01 (kan hentes på DANAKs hjemmeside).

9 Appendix

Udregning af temperaturmålingens usikkerhed ved brug af regnereglerne

Man kan spørge, om man ville have fundet frem til den samme usikkerhed, hvis man havde brugt regnereglerne for usikkerheder fra boks 7. I det følgende bruger vi regnereglerne for usikkerheder til at vise, at man vil nå frem til den samme usikkerhed for resultatet, som man kommer frem til ved udregning med de individuelle usikkerhedsbidrag.

Vi starter med at udregne bidraget fra hvert led i funktionen. Funktionen kan omskrives, som vist her:

$$T_k = \alpha \cdot T_{\text{aflæst}} + \beta \rightarrow T_k = g + \beta$$

hvor $g = \alpha \cdot T_{\text{aflæst}}$. Udregningen for usikkerheden af T_k , kan nu udtrykkes således

$$u(T_k) = u(g + \beta) = \sqrt{u(g)^2 + u(\beta)^2}$$

Usikkerheden for g udregnes ved at bruge regnereglen for produkt

$$\frac{u(g)^2}{g^2} = \left(\frac{u(\alpha)}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{u(T_{\text{aflæst}})}{T_{\text{aflæst}}}\right)^2$$

Nu kan $u(g)^2$ isoleres ved at gange med g^2 på begge sider:

$$u(g)^2 = g^2 \cdot \left(\left(\frac{u(\alpha)}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{u(T_{\text{aflæst}})}{T_{\text{aflæst}}}\right)^2 \right)$$

Udtrykket for $u(g)^2$ kan nu indsættes i udtrykket for $u(T_k)$ ovenfor:

$$u(T_k) = \sqrt{(\alpha \cdot T_{\text{aflæst}})^2 \cdot \left(\left(\frac{u(\alpha)}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{u(T_{\text{aflæst}})}{T_{\text{aflæst}}}\right)^2 \right) + u(\beta)^2}$$

Indsættes værdierne fås

$$\begin{aligned} u(T_k) &= \sqrt{(0,950 \cdot 23,245)^2 \cdot \left(\left(\frac{0,0070}{0,950}\right)^2 + \left(\frac{0,0719}{23,245}\right)^2 \right) + 0,1843^2} \text{ } ^\circ\text{C} \\ &= 0,2552 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Dette er identisk med usikkerheden fundet ved summen af inputparametrenes individuelle usikkerhedsbidrag som udregnet i afsnit 4.4. Ulempen ved at udregne usikkerheden ud fra regnereglerne er, at man ikke får informationen om de individuelle parametres bidrag til resultatets usikkerhed.

10 Læringsudbytte

Forudsætning: Læst undervisningselement A1: introduktion til målinger.

Hvad gennemgås: Usikkerhedsbudgetter, angivelse af måleresultat, modelfunktion, angivelse af et resultat, ekspanderet usikkerhed, dækningsfaktor, betydende cifre i et resultat, usikkerheds bidrag, regneregler for usikkerheder, anvendelse af retlinjet korrektionsfunktion.

Udgangspunktet for at introducere usikkerhedsbudgetter er et illustrerende eksempel med tidsmåling i 100 meter løb. Efterfølgende udvides eksemplet med uddybende elementer, der skal give en forståelse for de problemer og udfordringer, som kan opstå omkring vurdering af usikkerhed. Inden da gennemgås grundlæggende begreber; modelfunktion, middelværdi, spredning, standard usikkerhed og regneregler for usikkerheder, som alle skal anvendes for at opstille et usikkerhedsbudget. Dette gøres med eksempler på en temperaturmåling. Til sidst gennemgås en mere systematisk fremgangsmetode (der læner sig op ad GUM "Guide for the Expression of Uncertainty in Measurement") til at opstille et usikkerhedsbudget for en temperaturmåling, hvor en korrektionsfunktion er opskrevet med tilhørende usikkerheder for funktionens inputstørrelser. Herefter udvides usikkerhedsbudgettet med øvrige usikkerhedsbidrag fra skalainterval og termiske gradienter. Endelig gennemgås, hvordan resultatet fremskrives. Undervejs introduceres: hvad en modelfunktion er, regneregler for usikkerheder, bestemmelse af middelværdi, spredning og standard usikkerhed, og regler for afrunding. Denne tilgang er valgt for at have et sjovt, vedrørende og nærværende eksempel som udgangspunkt for at illustrere udfordringerne ved opstilling af usikkerhedsbudgetter.

GUM: ISO Guide for the Expression of Uncertainty in Measurement.