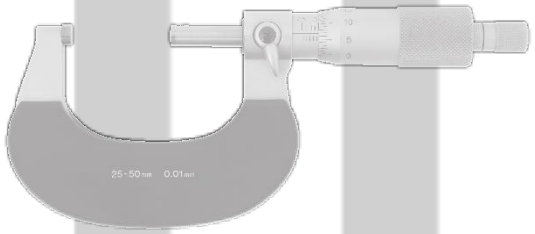
MÅLEUSIKKERHED OG OVERHOLDELSE AF TOLERANCE

UNDERVISNINGSELEMENT

A4

UNDERVISNING
I MÅLETEKNIK

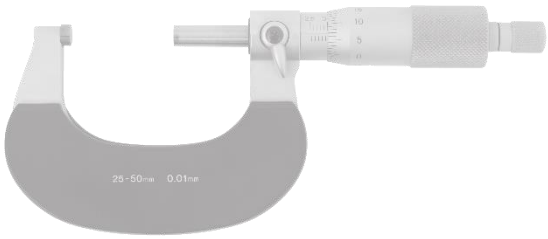


metrologi.dk

MÅLEUSIKKERHED OG OVERHOLDELSE AF TOLERANCE

Af Erik Jensen og Johan B. Kondrup, FORCE Technology

0. udgave – Marts 2017 (revisionsdraft 15. maj 2017)



Copyright © 2017 metrologi.dk – Materialet må ikke anvendes til kommercielt brug, uden tilladelse fra metrologi.dk.

Metrologi.dk er finansieret af Styrelsen for Forskning og Innovation. Materiale er udarbejdet i et samarbejde mellem GTS-institutterne DFM A/S, FORCE Technology og DELTA - a part of FORCE Technology.
Læs mere om projektet på www.metrologi.dk.
Parterne i Metrologi.dk kan ikke gøres ansvarlig for fejl og mangler i indholdet af undervisnings materialet eller i indholdet på websitet, samt indholdet i de eksterne dokumenter og websites, der linkes til, medmindre andet følger af dansk rets almindelige regler.

Grafisk design af: Henriette Schäfer Høyrup og David Balslev-Harder.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning 2

1.1 Sandsynlighedsfordelinger og konfidensintervaller 2

1.2 Standardafvigelse og konfidens 3

1.2.1 Standardafvigelse 3

1.2.2 Konfidensniveau og -interval 3

1.3 Normalfordelingen 4

1.4 Gammafordelingen 5

1.5 Fordelinger - usikkerhedsbudget 6

1.6 Opsummering 7

2 Måleusikkerhed 7

3 Stringente metoder 8

3.1 Stringent accept og kassation 8

3.2 Indsnævret acceptinterval 9

4 Risiko baseret 11

4.1 Beregning af risiko 12

4.2 Økonomisk tilgang 13

5 Generelle betragtninger 16

6 UEA5.xls 16

6.1 "Målte værdier og fordeling" 16

6.2 "Tolerancer og acceptgrænser" 17

6.2.1 Kolonne N-AA 17

Litteraturliste 18

Appendix 1 – Beregning af risiko 19

Appendix 2 – Excel/VBA til risikoberegning 21

1 Indledning

I forbindelse med en handel imellem to parter er der indbygget en forventning om at det handlede overholder nogle krav. Når handelen omfatter fysiske emner indeholder disse ofte krav til produktet i form af angivelse af tolerancer på udvalgte parametre. Angivelsen af en tolerance eller usikkerhed på en målbar parameter medfører derfor at brugeren af denne information opbygger en forventning til parameteren. Angives for eksempel at et måleredskab har en tolerance på 1%, så forventer forbrugeren at denne tolerance er korrekt.

Kontrollen af den angivne usikkerhed eller tolerancen gennemføres med måleudstyr. Dette er også behæftet med måleusikkerhed og dermed med en forventning dets troværdighed.

Dette dokument reflekterer over om en given tolerance overholdes. Der beskrives metoder til til at hjælpe med denne refleksion. Der ses på både de stringente ja/nej metoder samt metoder, som anvender en statistisk tilgang til at vurdere risici og derigennem økonomiske forhold.

Der anvendes et gennemgående eksempel - produktion af aksler med en bestemt diameter på ø50,00 mm. Senere vil der blive opdelt i aksler som overholder en tolerance ± 0,75 mm og aksler, som ikke overholder denne. I forbindelse med de økonomiske vurderinger vil antagelsen være at aksler, som overholder tolerancen på ± 0,75 mm, vil have en høj salgsværdi i sammenligning med aksler, som ikke overholder den angivne tolerancer. I den virkelige verden vil der være eksempler på produkter som sælges til forskellige priser alt efter overholdelse af skrappe krav, ligesom der vil være eksempler på at dele skrottes, hvis de ikke overholder en tolerance.

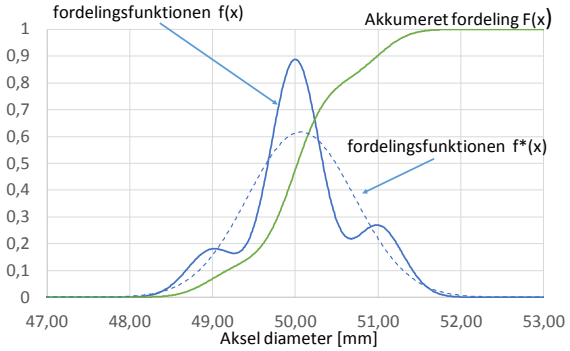
Den studerende opfordres til selv at opstille eksempler fra den studerendes dagligdag ud fra samme principper. Om der er tale om buræg, tennisbolde eller andet er ligegyldigt. For de fleste tolerancer er det således at der vil være en økonomisk gevindst ved at overholde disse. Evnen til at vurdere overholdelse kan således have en direkte indflydelse på et firmas bundlinie. De økonomiske forhold gennemgås dog ikke i detaljer.

Excel filen UEA5.xls indeholder to faneblade, som kan anvendes til øvelser vedrørende emnerne i dette dokument. Afsnit 6 beskriver UEA5.xls nærmere.

1.1 Sandsynlighedsfordelinger og konfidensintervaller

En sandsynlighedsfordeling, f(x), beskriver hvor stor sandsynligheden er for at en parameter har netop værdien x. Sandsynlighedsfordelinger er centrale både i forbindelse med vurdering af en produceret mængde emner, fastlæggelse af usikkerhedsbudgetter samt vurdering af om en parameter overholder en tolerance.

Som nævnt er det gennemgående eksempel i dette dokument fremstilling af en vilkårlig aksel, som bliver anvendt til et formål, som er og forbliver ukendt for læseren. Længden er uinteressant, da eksemplerne i dette materiale udelukkende fokuserer på diameteren. Figur 1 viser en simuleret sandsynlighedsfordeling for akslernes diametre benævnt f(x) ud fra et større antal tilfældigt udtrukne aksler fra produktionen.



Figur 1: Fordelingsfunktion for akseldiameter, f(x), akkumuleret fordelingsfunktion, F(x) og en normalfordeling, f(x), med tilsvarende standardafvigelse og middelværdi.*

Den akkumulerede sandsynlighedsfordeling F(x) er ligeledes vist på figur 1. F(x) viser det relative antal af akseldiametre under en given diameter x.

Fordelingsfunktionen f*(x) fremkommer, hvis det ved databehandlingen antages at akslernes diametre er normalfordelte. Som det ses på figur 1, så er der en

tydelig forskel som kan være af betydning, hvis data skal behandles statistisk.

Den simulerede fordeling er fremkommet som en sum af tre normalfordelinger og med intervaller for x med størrelsen 0,01. Se tabel 1.

Fordeling	Middelværdi	Spredning
A	50,00 mm	0,3 mm
B	49,00 mm	0,3 mm
C	51,00 mm	0,3 mm

Tabel 1: De tre normalfordelinger, som ligger til grund for data til figur 1.

Y-aksen på figur 1 gælder kun for F(x). Værdien for f(x) vil være afhængigt af antallet af i hvor mange intervaller x-aksen opdeles i. Opdelingen i flere og dermed mindre intervaller giver lavere værdier af f(x).

Den akkumulerede fordeling, F(x), vil derimod altid starte med nul og slutte med værdien 1 uanset antallet af intervaller på x-aksen, hvis beregningerne er lavet korrekt.

1.2 Standardafvigelse og konfidens

Standardafvigelse og konfidensniveau (omtalt som konfidens) er to centrale elementer, som anvendes i forbindelse med beskrivelse af en måleusikkerhed og dermed også indirekte hvor stor en andel af emner – for eksempel aksler – som reelt kan forventes at være indenfor den angivne tolerance.

1.2.1 Standardafvigelse

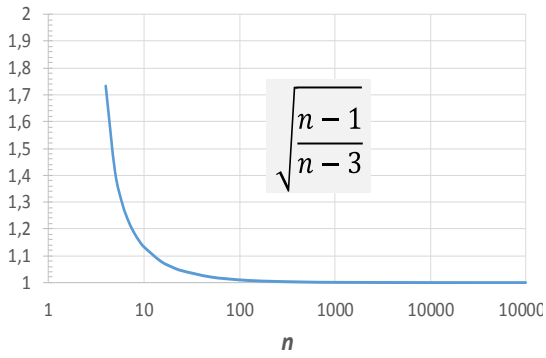
Standardafvigelsen for et antal målinger beregnes

Formel 1:

$$s(y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y})^2}{n-1}}$$

hvor y_i er værdien for den i'te måling, $\tilde{y}$ er middelværdien for alle målinger og n antallet af målinger som anvendes til beregningen af standardvigelsen.

Vejledningen i hvorledes måleusikkerhed fastlægges [1] kaldes også for GUM. I den gældende udgave anvendes at standardusikkerheden, u(y), sættes lig med s(y).



Figur 2: Skaleringsfaktor imellem s(y) og u(y) ved forskelligt antal målinger.

I forbindelse med revision af GUM [2] er denne formel justeret, således at der tages højde for antallet af emner, n, som reelt er et endeligt tal. Figur 2 viser faktoren som funktion af n.

Formel 2:

$$u(y) = s(y)\sqrt{\frac{n-1}{n-3}}$$

Ved n=100 er forskellen 1%, ved n=1.000 er forskellen reduceret til 0,1%. Med n=10.000 er forskellen 0,01%. Alt efter ønsket statistisk nøjagtighed skal der tages højde for antallet af målinger som ligger til grund for fastlæggelse af den statistiske fordeling.

I dette undervisningselement er valgt at betragte det statistiske grundlag for de anvendte sandsynligheds-fordelinger som værende baseret på mere end 100.000 emner, hvorfor u(y) sættes lig s(y).

I forbindelse med revision af GUM er det ligeledes foreslået, at usikkerheder ikke kun angives med en tolerance men også en angivelse af udformningen af sandsynlighedsfordelingen. Der henvises til [2] for yderligere information.

Beregning af standardafvigelsen for den simulerede akselfordeling vist på figur 1 er gennemført ved hjælp af excel regneark via en opdeling af intervallet 47 mm til 54 mm i et stort antal mindre intervaller. Resultatet er en standardafvigelse på 0,65 mm og middelværdi på 50,07 mm. Disse data ligger til grund for fordelingsfunktionen f*(x) vist på figur 1.

1.2.2 Konfidensniveau og -interval

Konfindensniveau og *konfindensinterval* udtrykker en forventning om at en vis andel af alle udfald vil være

indenfor et specificeret interval (meget ofte angivet i %). Et 95% konfidensinterval dækker således over at det angivne interval for måleparameteren omslutter 95% af de producerede aksler.

Konfidensniveau og -interval er linket til den akkumulerede fordelingsfunktion, F(x), som er summen af udfald mindre end værdien z. f(x) er sandsynligheden for at et udfald er lig x.

Formel 3:

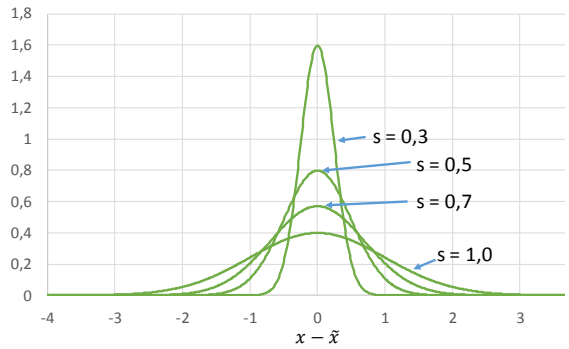
$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx$$

Fastlæggelse af et konfidensinterval sker ved at fastlægge et ønsket konfidensniveau, for eksempel 95% svarende til et tal 0,95. Dette svarer traditionelt til at man fastlægger de værdier af x, som opfylder betingelsen $F(x_1)=0{,}025$ og $F(x_2)=0{,}975$.

Intervallet fra x_1 til x_2 er således konfidensintervallet.

Det er normalt underforstået, at et konfidensinterval ligger symmetrisk – dvs. ved angivelse af et 95 % konfidensniveau vil de sidste 5% være fordelt med 2,5 % på hver side af intervallet. Statistisk set vil et interval fra 1 % - 96 % også være korrekt, da forskellen er 95%.

For standardiserede sandsynlighedsfordelinger – det vil sige formelbaserede – er der ofte udviklet formler til direkte beregning af intervaller for konfidens-niveauer.



Figur 3: Normalfordeling ved forskellige standardafvigelser, s.

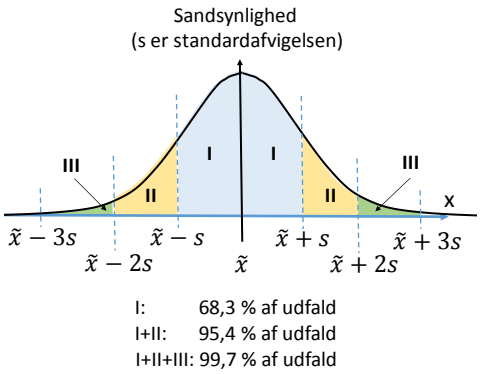
For mere databaserede sandsynlighedsfordelinger skal der foretages en bregning via formel 3.

1.3 Normalfordelingen

Normalfordelingen eller *Gaussfordelingen* er den mest anvendte fordelingsfunktion i praksis, da den reflekterer en fordeling, hvor afvigelser fra den rigtige værdi er tilfældige og uden nogen form for bias.

Figur 3 viser normalfordelingen ved forskellige værdier for standardafvigelsen, s, beregnet ud fra formel 1 og hvor der er anvendt middelværdien $\tilde{x} = 0$.

Ved store værdier af s vil sandsynlighedsfordelingen omfatte et stort interval. Ved et lille s vil intervallet være snævert.



Figur 4: Antallet af udfald ved antagelse af normalfordeling og kendt standardafvigelse. forskellige standardafvigelser, s.

Når normalfordelingen anvendes til beskrivelse af konfidensintervaller, så har normalfordelingen den egenskab at 95% konfidens opnås ved et interval på middelværdien +/- 2 gange standardafvigelsen.

Med middelværdi +/- 3 gange standardafvigelsen omsluttes 99.7 % af alle udfald. Figur 4 illustrer dette grafisk.

Normalfordelingen skrives matematisk

Formel 4:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi s^2)}} exp^{\left(-\frac{(x-\tilde{x})^2}{2s^2}\right)}$$

hvor s er standardafvigelsen og $\tilde{x}$ er gennemsnittet.

Normalfordelingen er født symmetrisk omkring middelværdien idet forskellen (x-$\tilde{x}$) er i anden potens og dermed uafhængig af fortegnet på forskellen.

Normalfordelingen programmeres normalt ikke ud fra formel 5. Derimod er den så meget anvendt at både

sandsynlighedsfordelingen og den akkumulerede sandsynlighedsfordelen er standardfunktioner i for eksempel regnearksapp Excel.

Excel har funktionen *normdist*(x, $\tilde{x}$, s, 0) til beregning af sandsynlighedsfordelingen og *normdist*(x, $\tilde{x}$, s, 1) til beregning af den tilhørende akkumulerede sandsynlighedsfordeling.

Normalfordelingen vil teoretisk aldrig gå mod nul sandsynlighed langt væk fra middelværdien. I praksis vil der altid være nogle endelige afgrænsinger for hvor langt væk et udfald kan være fra middelværdien i forhold til standardafvigelsen. I praksis vil seks gange standardafvigelsen være en tilstrækkelig distance for at sikre at alle udfald er repræsenteret.

Formel 3 kan derfor omskrives til

Formel 5:

$$F(z) = \int_{-6s}^{z} f(x)\,dx$$

Tabel 2 viser konfidensintervaller for akslerne vist på figur 1 beregnet ud fra formel 3 og under den forudsætning af konfidensintervallet er symmetrisk i forhold til middelværdien.

Konfidens-niveau	f(x)	f*(x)
68,3%	49,49 - 50,76	49,42 - 50,71
95,4%	48,70 - 51,35	48,77 - 51,36
99,7%	48,30 - 51,72	48,13 - 52,01

Tabel 2: Interval for akslernes diametre vist på figur 1 ved forskellige konfidensniveauer og antaget symmetri.

Hvis der ønskes et 99,7 % konfidensniveau, så er den korrekte beregning at x skal være i intervallet fra 48,30 mm til 51,72 mm.

Er der ved den statistike behandling af data antaget en normalfordeling, så fremkommer intervallet 48,13 mm til 52,01 mm.

Der er således en forskel på ca. 0,3 mm i begge ender af intervallet alt efter antagelse om fordelingen.

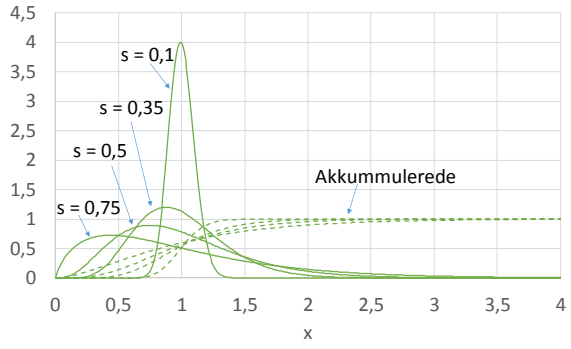
I en sælger-køber relation er det således vigtigt at der er enighed om ikke blot konfidensniveau på data men også enighed om at sandsynlighedsfordeling skal være matematisk korrekt eller om der må anvendes en antagelse om normalfordeling.

Er konfidensintervallet kritisk, er det således en god ide at kontrollere om ens distribution nu også er som antaget.

1.4 Gammafordelingen

Et af de større svagheder ved normalfordelingen er at den er symmetrisk. Hvis man for eksempel ønsker at måle rundheden af en aksel, så vil man altid få en positiv afvigelse i forhold til 0 (negativ rundhed er ikke mulig). *Gammafordelingen* er derimod en brugbar standardfordeling, idet den tager højde for, at værdier ikke kan være negative.

Gammafordelingen er ligeledes en normalt forekommende standard funktion i regnearks-programmer. Gammafordelingen beskrives matematisk som



Figur 5: Gammafordelingen ved forskellige standardafvigelser, s.

Formel 6:

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1}\,e^{\frac{-x}{\beta}}$$

hvilket er notationen fra Excel beskrivelsen af funktionen *gamma.dist(x,α,β,0)*. Formel 6 vil ikke blive beskrevet mere i detaljer men der henvises til andre kilder.

For at gøre funktionen brugbar anvendes middelværdi og standardafvigelsen til at beregne de to indgående parametre $\alpha = \frac{\tilde{x}^2}{s^2}$ og $\beta = \frac{s^2}{\tilde{x}}$.

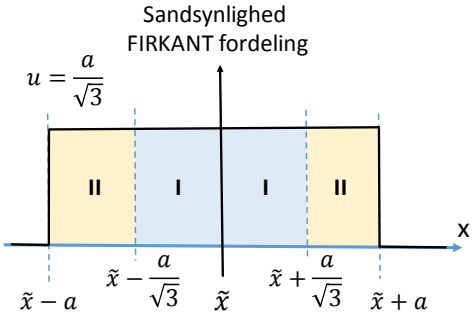
Excel funktionen *gamma.dist(x,α,β,1)* anvendes til at beregne den tilsvarende akkumulerede distribution.

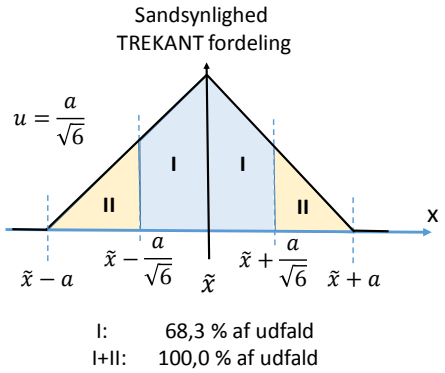
Figur 5 viser gammafordelingen for en middelværdi $\tilde{x} = 1$ men ved forskellige standardafvigelser.

Det karakteristiske ved gamma sandsynligheds-fordelingen med s > 0,1 er at højeste sandsynlighed er ved et lavere punkt end gennemsnittet. Dette skyldes den asymmetriske fordeling omkring middelværdien. For s nærmende sig 0,1 bliver gamma-fordelingen reelt sammenfaldende med normal-fordelingen

1.5 Fordelinger - usikkerhedsbudget

I forbindelse med usikkerhedsbudgetter er de typisk anvendte fordelinger ud over normalfordelingen også



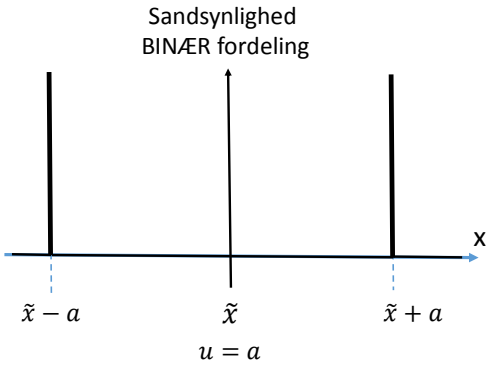


Figur 7: To typiske sandsynlighedsfordelinger: firkant og trekant. $\tilde{x}$ er middelværdien. u er standardusikker-heden. Tolerancen udgøres af -a til +a.

firkant fordeling, trekant fordeling og binær fordeling. Forslaget til ny GUM vejledning [2] indeholder derudover et større antal forskellige sandsynligheds-fordelinger, som kan anvendes som standard-fordelinger. [2] har ligeledes for hvert af disse angivet en beregnet standardusikkerhed.

Figur 6 viser to typiske fordelinger – firkant og trekant fordelingen.

Firkantfordelingen beskriver en homogen fordeling, hvor der kun kendes nogle grænser (tolerancer) men ikke noget om sandsynligheden. Dette giver den største standardusikkerhed. Hvis der ikke kendes andet, så kan denne fordeling vælges, da den giver en konservativ værdi for standardusikkerheden.



Figur 6: Binær sandsynlighedsfordelinger.

Trekantfordelingen ligner firkantfordelingen. Her er der dog tilføjet den formodning, at det er mest sandsynligt at udfaldet ligger ved middelværdien men at der derudover ikke er noget kendskab til fordelingen.

Figur 7 viser den mest ekstreme fordeling – den binære. Værdien af en parameter kan kun være en af yderpunkterne. Standardusikkerheden er derfor lig a.

Ved at sammenholde figur 4, figur 6 og figur 7 kan det tydeligt ses at opgivelsen af standardusikkerhed eller standardafvigelse i sig selv kun er en halv sandhed. Det hele billede af en fordeling fremkommer kun ved at der samtidigt angives typen af fordeling.

Normalt vil angivelser af tolerancer underforstået være relateret til en firkant fordeling. Tilsvarende vil en opgivet standardusikkerhed normalt være underforstået at være relateret til en normal-fordeling.

1.6 Opsummering

Det centrale budskab i forbindelse med sandsynlighedsfordelinger og konfidensintervaller er at beregningsteknikken til fastlæggelse af standard-afvigelse og konfidensinterval er ens for alle fordelinger. Valg af sandsynlighedsfordelingen foretages ofte implicit – for eksempel i forbindelse med usikkerhedsbudgetter – men er en vigtig parameter ved fastlæggelse af standardafvigelsen (eller standardusikkerheden) for en parameter.

Den korrekte metode til fastlæggelse af standardusikkerheder vil være at tage udgangspunkt i en historisk opmålt fordeling af målinger, således at der ikke træffes beslutninger på basis af en gættet fordeling.

2 Måleusikkerhed

Kardinalpunktet for vurdering af en tolerance er usikkerhedsbudgettet for det anvendte måleudstyr og fortolkning af denne.

Der henvises til GUM vejledningen [1] eller andre dokumenter såsom undervisningselement A3 [8] vedrørende uddybende beskrivelser af hvorledes usikkerhedsbudgetter opstilles. Her vil der kun være et enkelt eksempel.

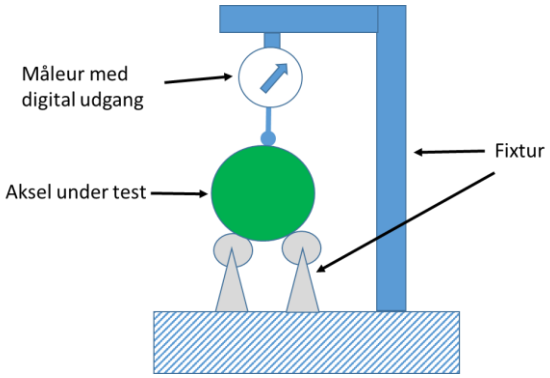
Der tages udgangspunkt i opmålingen af aksel-diameteren, som i dette specifikke tilfælde foretrages ved at lægge akslen i en vugge. Under rotation af akslen foretages en aflæsning af måleuret således at både akseldiameter og ovalitet aflæses. Opstillingen er kalibreret med firmaets egne normaler – det vil sige aksler med en stor præcision.

Måleuret er elektronisk aflæst og anvender en A/D konvertering imellem måleuret og dataopsamlingen for videre statistisk behandling.

Opstillingen er illustreret på figur 8.

For at kunne beregne usikkerhedsbudgettet for denne måleopstilling er der indsamlet følgende informationer om influensparametre.

Fixtur: opstillingen er elastisk og vurderes til at medføre en ± 0,1 mm usikkerhed på radius. Der kendes ikke noget til sandsynlighedsfordelingen,



Figur 8: Tænkt måleopstilling til fastlæggelse af akseldiameter og ovalitet.

hvorfor denne vælges konservativt til at være firkantfordelt.

Omregningen fra tolerance til standardusikkerhed sker jævnfør figur 6 ved at multiplicere med en faktor $1/\sqrt{3}$. Standardusikkerheden, u_{fixtur}, for fixturet bliver således 0,1 mm / √3 = 0,058 mm.

Måleur: Måleuret forventes at have en måleusikkerhed på 0,05 mm normalfordelt (opgivet af producenten som 95% konfidens niveau). Jævnfør figur 4 svarer de opgivne 0,05 mm måleusikkerhed til to gang standardusikkerheden. Måleurets standardusikkerhed beregnes derefter som $u_{målerur}$ = 0,05 mm / 2 = 0,025 mm.

Datalink: Der er anvendt en 12 bits A/D konvertering med en range på 50 mm.

Mindste betydende bit (LSB) for en 12 bit omsætning er 1/4098. Dette betyder, at det analoge range på 50 mm opdeles i 4097 intervaller. Dette svarer til en opløsning på 0,012 mm (afrundet til nærmeste µm).

Da LSB her betragtes som binær usikkerhed, så vil standardusikkerheden på datakonverteringen vælges til ligeledes være $u_{datalink}$ = 0,012 mm.

Den kombinerede standard usikkerhed:

Den kombinerede standard usikkerhed skal beregnes ud fra den antagelse at alle bidrag er indbyrdes uafhængige – det vil sige

$$u_m = \sqrt{u_{fixtur}{}^2 + u_{måleur}{}^2 + u_{datalink}{}^2}$$

$$= \sqrt{0{,}058^2 + 0{,}025^2 + 0{,}012^2}$$

$$= 0{,}064\ mm$$

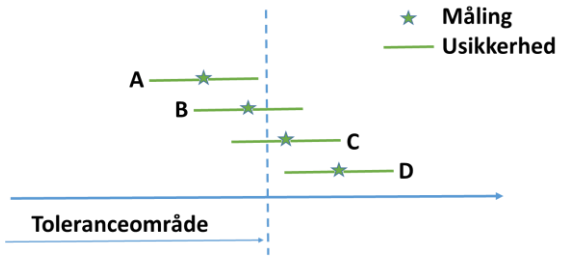
Det vælges at antage at standardusikkerheden er normalfordelt. Dette er en tilnærmelse, da det reelt kun er måleurets usikkerhed, som er normalfordelt.

Standardusikkerheden på målingerne u_m = 0,064 mm vil være udgangspunktet for de videre afsnit.

Troværdigheden af den fundne standardusikkerhed afhænger helt af at der ved udfærdigelse af usikkerhedsbudgettet er medtaget de væsentligste bidrag til måleusikkerheden. Herudover er det også vigtigt at der er foretaget den bedst mulige vurdering af usikkerhedsbidragenes størrelser og indbyrdes afhængighed. Der er for eksempelt ikke medtaget usikkerhedsbidrag fra omgivelserne, som kan være et værksted med svingende temperaturer eller et dedikeret målelokale med kontrollerede omgivelser (termisk udvidelse er ikke vurderet i forhold til opstillingen).

3 Stringente metoder

Enhver form for kvalitetssikring vil betyde at der på et eller andet tidspunkt skal foretages en beslutning om et produkt er udenfor eller indenfor en tolerance. En manglende overholdelse af de stillede forventninger vil være uønsket. For en tolerance vil der derfor være en acceptgrænse som anvendes til at fastlægge om produktet kan accepteres eller skal afvises.



Figur 9: Udenfor eller indenfor tolerance?

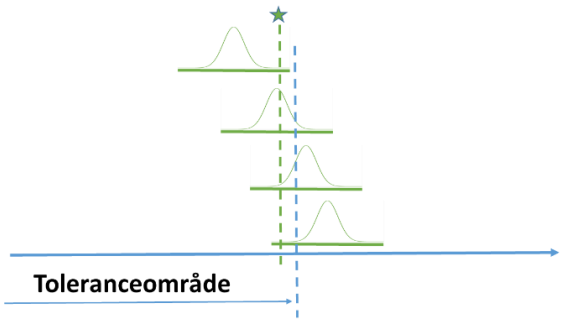
For de stringente metoder vil svaret altid være ”JA” eller ”NEJ”. Der vil dog være mindst 4 spørgsmål til disse svar:

- Er værdien udenfor tolerance?
- Er værdien indenfor tolerance?
- Er vi sikre på at værdien ikke er udenfor tolerance?
- Er vi sikre på at værdien ikke er indenfor tolerance?

Figur 9 illustrerer disse fire spørgsmål.

Stjernerne på figur 9 den målte værdi for en parameter og stregen illustrerer tilhørende måleusikkerhed. A og D er umiddelbart henholdsvis indenfor og udenfor tolerancen. Hverken B eller C er klart indenfor eller udenfor. Bemærk at der er medtaget den forudsætning, at usikkerheden omfatter 100 % konfidens for at disse udsagn er korrekte. Altså at den sande værdi altid vil være indenfor den angivne usikkerhed.

Figur 9 viser en anden variant, hvor den målte parameter reelt er indenfor tolerancen. Men har man nogen kendskab til hvorledes den målte parameter ligger i forhold til fordelingen af alle målinger?



Figur 10: Udenfor eller indenfor tolerance? Stjerne illusterer den sande værdi.

3.1 Stringent accept og kassation

Figur 11 illustrerer en situation, hvor der er et ønske om at alle accepterede emner med høj sandsynlighed er indenfor tolerancen. I disse tilfælde skal acceptgrænserne for kontrolmålingerne ligge indenfor den lave ende af tolerancen, T_L, og den højeste værdi af tolerancen, T_H. Måleusikkerheden U skal henholdsvis lægges til T_L og fratrækkes T_H.

Dette setup kaldes også for *stringent accept*. Ønskes for eksempel en 95,4% konfidens på at tolerancen

Figur 11: Stringent accept. T_L og T_H er henholdsvis den laveste og højeste værdi for tolerance. Tilsvarende er A_L og A_H er henholdsvis den laveste og højeste værdi for acceptintervallet. U er den valgte måleusikkerhed skaleret til at omfatte et ønsket konfidensinterval.

overholdes, så skal U sættes til $2u_m$, hvor u_m er standardusikkerheden på målingen (forudsat at antagelser om symmetri og normalfordeling holder).

Figur 12 viser den modsatte situation – nemlig at der kun ønskes at afvise emner, hvor disse med stor sandsynlighed er udenfor tolerancen.

Figur 12: Stringent kassation. T_L og T_H er henholdsvis den laveste og højeste værdi for tolerance. Tilsvarende er A_L og A_H er henholdsvis den laveste og højeste værdi for acceptintervallet. U er den valgte måleusikkerhed skaleret til at omfatte et ønsket konfidensinterval.

Et eksempel på dette forsigtighedsprincip er politiets fartkontroller. Hvis politiet medbringer udstyr med 5% usikkerhed ved et 95% konfidensniveau, så vil der ikke udskrives bøde før man kører mere end 5% for hurtigt. Dette svarer til at køre 116 km/h på en motorvejsstrækning med en fartgrænse på 110 km/h.

Følges principperne i ISO 14253 vil et firma, som producerer et emne skulle sikre *stringent accept* i deres udgangskontrol, hvorimod indgangskontrollen hos køberen skal sikre *stringent kassation*. Lidt mere firkantet beskrevet sikrer denne metode at der kun fremsendes materialer imellem to virksomheder, når der er sikkerhed for at tolerancen overholdes og materiale kun sendes retur, når der er helt sikkerhed for at tolerancen ikke er overholdt.

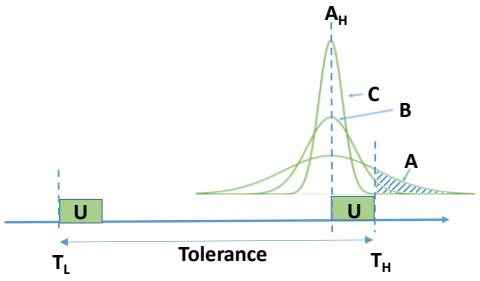
For akkrediterede prøvninger anvendes som udgangspunkt hverken *stringent kassation* eller *stringent accept*. Her anvendes den direkte tilgang hvor en målingen vurderes i forhold til tolerancen uden hensyn til nogen usikkerhed. Akkrediterede laboratorier opererer med en lille måleusikkerhed. Akkrediteringen tildeles laboratorier som kan eftervise høj nøjagtighed via faste procedurer for måling foruden at sikre sporbare målinger. Konsekvensen af dette er at et produkt kontrolleres ud fra samme præmisser ved forskellige akkrediterede laboratorier og der ikke medtages variationer imellem de forskellige laboratoriers måleusikkerhed i forbindelse med vurdering om overholdelse af en grænse.

3.2 Indsnævret acceptinterval

Figur 13 illustrerer valget af en U værdi, som er skaleret i forhold til standardusikkerhed. Der er vist tre normalfordelinger, hvor den målte værdi er placeret i acceptgrænsen.

Kurve A svarer til at $U = u_m$. Kurve B svarer til at $U = 2\ u_m$ og kurve C svarer til at $U = 3\ u_m$. Det skraverede område illustrerer således den statistiske mængde som er udenfor tolerancen, som selv om der er målt en værdi indenfor acceptgrænse.

Praksis er ofte at anvende 95% konfidens, hvorfor der med udgangspunkt i en normalfordeling fås situationen vist med kurve B. Kvalitetssikring med betegnelsen six-sigma står for at U er fastlagt til 3u – det vil sige kurve C.



Figur 13: Sandsynlighed for at en værdi er udenfor tolerancen, når den målte værdi er netop øvre acceptgrænse. Skraveret felt udenfor tolerancer. Kurver er med $U=u_m$ (A), $U=2u_m$ (B) og $U=3u_m$ (C).

I forhold til det gennemgående eksempel med produktion af aksler, antages at producenten er bedt om at levere i henhold til six-sigma, hvorfor U skal fastlægges til U = 3u_m (ser også figur 4). Da u_m er 0,064 mm, så bliver U = 3u_m = 0,192 mm.

Toleranceintervallet er 50,00 ± 0,75 mm svarende intervallet 49,25 mm – 50,75 mm. Acceptgrænserne bliver så 50,00 ± (0,75 – 0,192) mm svarende til intervallet 49,442 mm - 50,558 mm.

Hvis måleudstyret og procedurerne omkring kontrolmålingerne forbedres således at standardusikkerheden kan formindskes til eksempelvis 0,020 mm, så udvides acceptgrænserne til 40,390 mm - 50,690 mm.

Ændringerne for acceptintervallet ser muligvis ud til at være lille men ved at se på distributionen af aksler modsvarer denne forbedring af måleusikkerheden at antallet indenfor tolerancen øges med 6,4 %.

Valg af måleinstrument har således en stor betydning for størrelsen på acceptintervallet.

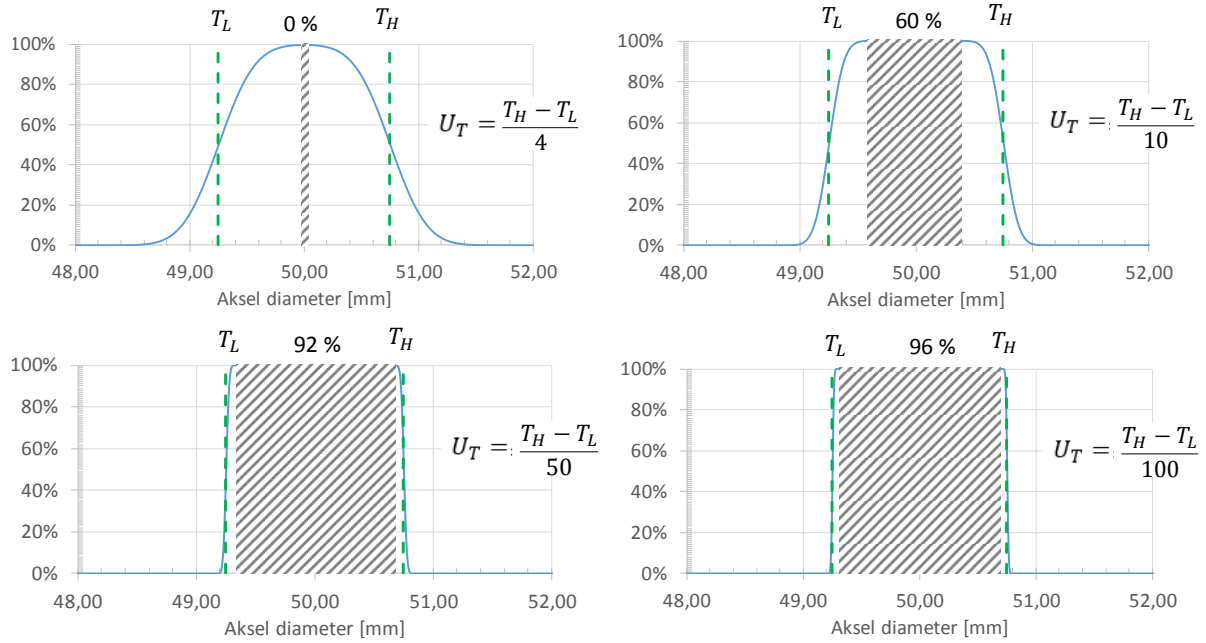
Figur 14 viser rent grafisk hvor stort et acceptinterval vil være i forhold til et toleranceinterval, når der er forskellige tolerance på måleudstyret.

Der er her valgt at bruge en *måletolerance*, U_T, og ikke *måleusikkerheden*. Den sande måling vil derfor ligge indenfor intervallet fra x-U_T til x+U_T. Dette skyldes at der dermed ikke skal tages højde for om fordelingen er firkant, trekant, normal eller en helt fjerde fordeling.

Er der angivet en normalfordelt standardusikkerhed som måleusikkerhed, så skal denne ganges med 3 for at opnå et 99,7% konfidensinterval (se figur 4) og dermed en måletolerance.

Der er en traditionel tommefingerregel som angiver, at man skal være mere end 10 gange bedre til at måle end hvad man forsøger at måle. Det vil omskrevet svare til at nøjagtigheden på måleudstyret skal være 1/10 af toleranceintervallet. Figur 14 viser at acceptintervallet kun udgør 60% af toleranceintervallet.

Hvis der derimod anvendes 1/100, så vil acceptintervallet være 96% af toleranceintervallet.



Figur 14: Sandsynlighed for at en opmålt aksel er indenfor tolerancen, når der anvendes måleudstyr med forskellige måletolerancer (U_T = 3 u_m) og der er målt en bestemt akseldiameter. T_L og T_H er henholdsvis den laveste og højeste værdi for toleranceintervallet for akslerne. Skraveret område illustrerer intervallet med 100% sandsynlighed for overholdelse af tolerancen. Måletolerance relateres til minimim 99,7 % konfidens. Der antages en normalfordelt måleusikkerhed.

Hvis måletolerancen kun er ¼ af tolerancen for akslen, så er der netop ingen målinger som med sikkerhed kan påstå, at akslen er indenfor tolerancen.

Omvendt kan ses at der ikke vil være nogen større forbedring at spore ved at forfine måleteknikken endnu mere. Ved måletolerance på 1/50 af toleranceintervallet kun opnås en lille forbedring af beslutningsgrundlaget for om en aksel er indenfor tolerancen.

Hvis der samtidigt tages højde for en variation på de opmålte aksler som ikke er homogen fordelt men koncentreret om middelværdien, så vil forbedringen være endnu mindre.

Måleudstyret usikkerhed og valgt acceptinterval (i forhold til toleranceintervallet) fortæller således noget om konfidensniveauet for en opmåling og hvor stor del af de målte emner, som statistisk set vil være udenfor en tolerance selv om målingen viser overholdelse af acceptgrænserne.

4 Risiko baseret

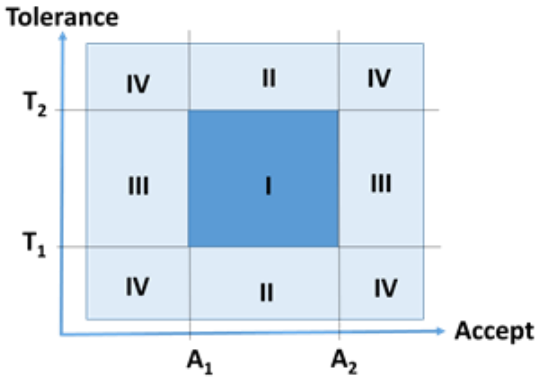
Alt efter valg af konfidensniveau vil der således altid være mulighed for at der er emner, som er udenfor tolerancen selv om der er målt værdier indenfor tolerancen. Den risikobaserede tilpasning af en acceptgrænse i forhold til tolerancen tager i modsætning til stringente metoder udgangspunkt i at fastlægge mængde af emner, som enten er fejlagtigt godkendt eller fejlagtigt kasserede.

Figur 15 illustrerer en opdeling af hele udfaldsrummet i forhold til overholdelse af tolerancer og acceptgrænser. Afhængigt af det valgte U vil der være udfald både udenfor og indenfor tolerance-grænserne.

Toleranceaksen kan her fortolkes som evnen til at producere indenfor tolerancen – for eksempel en CNC maskines evne til at producere et utal af aksler med diameteren indenfor en fastlagt værdi.

Acceptaksen kan her tilsvarende fortolkes som slutkontrollen, hvor den faktiske aksel kontrolmåles med måleudstyr.

Området "I" på figur 15 viser de udfald, som både er indenfor tolerancen men også indenfor acceptgrænserne. Det er i dette område de fleste emner bør ligge.



Figur 15: Udfaldsrum for en parameter i forhold til tolerance og acceptgrænse.

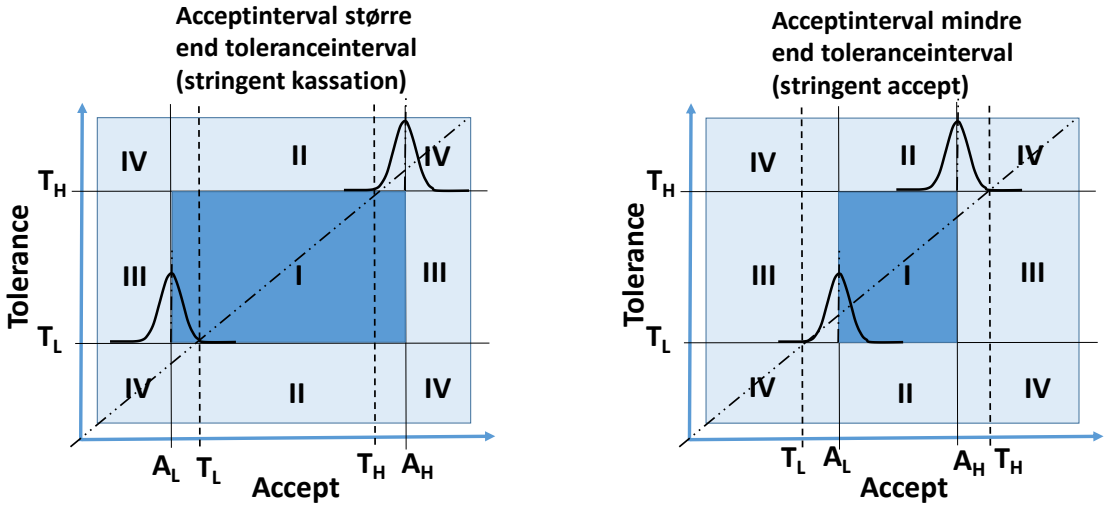
Områderne "IV" på figur 15 viser tilsvarende de udfald, hvor parameteren er udenfor tolerance og samtidigt konstateret udenfor acceptgrænserne ved målingerne. Disse udfald er også det ønskede resultat af kontrolmålinger.

Områderne "II" på figur 15 er de udfald, hvor en parameter er accepteret under kontrolmåling men faktisk ligger udenfor tolerance. Dette kaldes også for *kunderisiko*, da produktet fejler hos kunden men efter accept ved udgangskontrollen.

Tilsvarende er områderne "III" på figur 15 de udfald, hvor en parameter er indenfor tolerancen men vurderes udenfor i forbindelse med kontrolmålingen. Dette kaldes også for *producentrisiko*, da der kasseres emner som reelt er gode nok.

Kobles økonomiske betragtninger til disse beregninger således at der sættes tal på omkostninger ved fejlagtig kassation, korrekt kassation eller fejlagtig accept, så vil beregningerne kunne anvendes til at sætte pris på omkostninger til kvalitetssikringen og derigennem grundlag for forbedringer af måleudstyrets usikkerheder eller produktionsforhold.

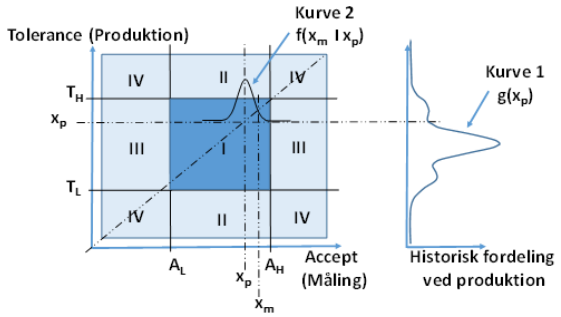
Figur 16 viser risiko udfaldsrummet set i relation til stringent accept og stringent kassation.



Figur 16: Udfaldsrum for en parameter i forhold til tolerance og acceptgrænse i forbindelse med stringent kassation og stringent accept.

4.1 Beregning af risiko

Den matematiske tilgang til beregning af risiko er beskrevet nærmere i appendix 1. Teknikken er illustreret på figur 17 og består i at der for hver tænkelig værdi af en målt akseldiameter foretages en beregning af sandsynligheden for accept eller kassation. Disse beregninger kobles med den kendte fordeling af akslernes diameter. Herved opnås antallet af udfald i hvert af de fire områder, I, II ,III og IV.



Figur 17: Regneteknisk princip i risikovurdering.

Appendix 2 indeholder VBA funktioner til anvendelse i excel såfremt der ønskes direkte beregninger via dobbeltintergraler.

Excelarket UEA5.xls kan anvendes til beregning af risiko, når der kendes en fordeling og måleusikkerhed. Regnearkets opbygning er beskrevet i afsnit 6.

I det gennemgående eksempel er det aftalt imellem producent og kunde at der vil være en speciel høj pris for akslerne, når tolerancen 50,00 mm ± 0,75 mm overholdes. Overholdes denne ikke skal akslerne ikke kasseres men sælges til en noget lavere pris. Dette er en ren fiktiv case, som anvendes til illustration af producentrisiko og kunderisiko.

Acceptgrænserne fastlægges på baggrund af toleranceintervallet og en skaleret måleusikkerhed, $U_m = k * u_m$. u_m er standardusikkerheden på måleudstyret som tidligere er fastlagt til 0,064 mm.

Ønskes der stringent accept, så vil skaleringsfaktoren k være 3. Ønskes stringen kassation, så vil k være -3. Skal der ikke være forskel på acceptgrænser og tolerancegrænser, så er k=0.

Tabel 3 vises resultatet af beregninger for aksel-fordelingen fra figur 1 og usikkerhedsbudgettet på måleudstyret fra afsnit 2.1 (% afrundet til 1 decimal) ved anvendelse af k=-3, k=0 og k=3.

	Stringent accept	Neutralt	Stringent kassation
Tolerance	**49,25 mm – 50,75 mm**	**49,25 mm – 50,75 mm**	**49,25 mm – 50,75 mm**
Måleusikkerhed, u_m	0,064 mm	0,064 mm	0,064 mm
k	**3,0**	**0,0**	**-3,0**
Udvidet måleusikkerhed ($U_m=ku_m$)	0,192 mm	0,000 mm	-0,192 mm
Acceptinterval	49,44 mm– 50,56 mm	49,25 mm – 50,75 mm	49,06 mm – 50,94 mm
Teoretisk gode aksler	72,6 %	72,6 %	72,6 %
Godtaget (I, figur 15)	64,6 %	71,6 %	72,6 %
Godtaget (II, figur 15)	0,0 %	1,0 %	8,1 %
Afvist (III, figur 15)	8,1 %	1,0 %	0,0 %
Afvist (IV, figur 15)	27,4 %	26,4 %	19,3 %
R_P	8,1 %	1,0 %	0,0 %
R_K	0,0 %	1,0 %	8,1 %

Tabel 3: Risikooversigt for tænkt akselproduktion, k=3, 0 og -3. De tre værdier svarer til neutral sammenligning, stringent kassation og stringent accept. Bemærk at kunde og producent risiko er lave ved neutral vurdering men vokser voldsomt, hvis det skal sikres at den anden minimeres.

Som en følge af et valg af k på 3 og et relativt nøjagtigt måleudstyr i forhold til tolerancen er det forventeligt, at der ikke er nogen udfald i områderne II. Der forventes ikke nogen aksler leveret udenfor tolerancerne. Derimod er der teoretisk 8,1 % af akslerne, som fejlagtigt afvises i slutkontrollen som udenfor tolerancen selv om de er indenfor tolerancen. Ved at justere på k til værdien 0 – det vil sige at acceptgrænser sættes til tolerancen - ændres risikoen som vist på tabel 3.

Der er ligeledes vist effekten af at sætte k=-3, svarende til kun at kassere emner som med sikkerhed er udenfor tolerancen (*stringent kassation*).

Tabel 3 viser således at jo større sikkerhedsfaktor der pålægges en måleudsikkerhed i forbindelse med stringent accept, jo færre emner vil fejle hos kunden og jo flere emner vil være fejlagtigt kasserede. Da R_K og R_P basalt set er økonomiske faktorer, så er det interessant at koble risikoberegningerne med økonomiske forhold og undersøge om der findes en optimal værdi for k.

4.2 Økonomisk tilgang

Der er imellem producenten af akslerne og kunden aftalt, at der betales forskellige priser for aksler, som overholder tolerancer og aksler, som ikke overholder tolerancer.

Til at illustrere den økonomiske tilgang er der valgt følgende forudsætninger:

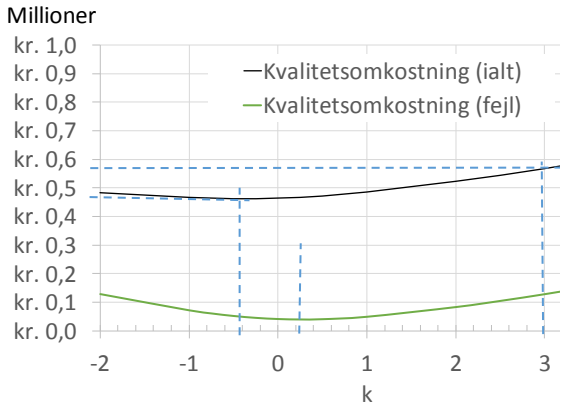
- Der produceres 200.000 aksler til kunden.
- Aksler, som er leveret, men viser sig ikke at overholde tolerancen skal kompenseres med kr 12,- stykket.
- Aksler, som kasseres, er prissat til et tab på kr 8,- stykket.

De valgte økonomiske parametre er udelukkende valgt til at illustrere den økonomiske tilgang og ikke taget fra en virkelig case.

Der regnes på at minimere tabene og ikke en fortjeneste.

Fabrikschefen har ud fra aftalen lavet lidt statistik på produktionen for at undersøge de økonomiske konsekvenser af stringent accept. Denne tilgang er oprindeligt valgt ud fra et ønske om at følge standarden.

Figur 18 viser fabrikschefens analyse af de økonomiske forhold (absolut forsimplet model). *Fabrikschefen* har lavet 2 kurver – en for tab som følge af forkerte beslutninger ved slutkontrollen og en for de samlede tab.



Figur 18: Tab ved forskellige valgte værdier af skaleret måleusikkerhed, hvor acceptgrænser er korrigerede i forhold til tolencen med $U_m=k*u_m$.

Kvalitetsomkostninger (fejl) omfatter de tab som følger af udfaldene i områderne II og III på figur 15.

Kvalitetsomkostninger (ialt) omfatter de tab som følger af udfaldene i områderne II, III og IV på figur 15.

Ved et k på 3 (konfidens på 99,7 %) er der en samlet kvalitestomkostning på ca. 568 tkr. Hvis der vælges en k på -0,5, så vil denne på papiret falde til 477 tkr. Altså smides 87 tkr bort som følge af et stringent accept kriterie. Betydning af k=-0,5 er vist på figur 19.

Figur 19: Accept og toleranceintervaller ved k=-0,5. Bemærk at acceptinterval er større end toleranceintervallet.

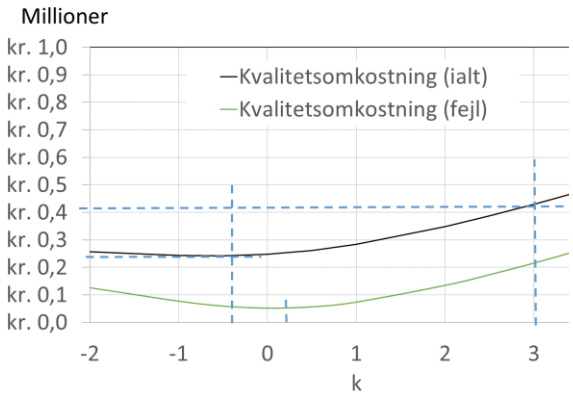
Som det også fremgår af figur 18 er det laveste punkt for forkerte beslutninger ikke ved samme k som for mindste værdi af de totale omkostninger. En k = -0,5 betyder også at acceptintervallet er større end toleranceintervallet.

Producentrisiko er nu reduceret væsentligt fra 8,1 % til 1,8 %. Dette har dog betydet at der nu medtages en risiko for at 0,5 % fejler ved kunden. Overordnet betyder det at antallet af akser, som ikke fejlagtigt afvises af slutkontrollen, reduceres. Tabel 4 kolonne 2 og 3 viser henholdsvis data for stringent accept og den justerede k værdi.

Den *produktionsansvarlige* bedyrer overfor fabrikschefen at det er muligt at reducere standardafvigelsen på de producerede emner fra 0,65 mm til 0,5 mm. Dette vil dog kræve investeringer i produktionsudstyret.

Fabrikschefens beregninger viser nu data som vist på figur 20. Den optimale værdi for k er fortsat på -0,5. Tabel 4 kolonne 3 viser de nye data.

Omkostninger til kassation er faldet kraftigt fra 462 tkr til 242 tkr. Omkostninger i forbindelse med forkerte beslutninger er derimod svagt øget fra 52 tkr til 60 tkr.



Figur 20: Tab ved forskellige valgte værdier af skaleret måleusikkerhed, hvor acceptgrænser er korrigerede i forhold til tolencen med $U_m=k*u_m$.Produktionen er forbedret således at spredningen er reduceret fra 0,65 mm til 0,5 mm.

Case	Strigent accept	Ændret k	Forbedring af produktion	Forbedring af måleteknik
Tolerance	49,25 – 50,75 mm	49,25 – 50,75 mm	49,25 – 50,75 mm	49,25 – 50,75 mm
Produktionen standardafvigelse	0,65 mm	0,65 mm	**0,5 mm**	0,65 mm
Måleusikkerhed, u_m	0,064 mm	0,064 mm	0,064 mm	***0,039 mm***
k	3,0	**-0,5**	-0,5	-0,5
Udvidet måleusikkerhed (ku_m)	0,192 mm	-0,032 mm	-0,032 mm	-0,019 mm
Acceptinterval	49,44 – 50,56 mm	49,22 – 50,78 mm	49,22 – 50,78 mm	49,23 – 50,77 mm
Godtaget (I, figur 12)	64,6 %	71,2 %	85,9 %	72,3 %
Godtaget (II, figur 12)	0,0 %	0,5 %	2,0 %	1,1 %
Afvist (III, figur 12)	8,1 %	1,8 %	0,7 %	0,3 %
Afvist (IV, figur 12)	27,4 %	25,6 %	11,4 %	26,3 %
R_P	8,1 %	1,8 %	2,0 %	1,1 %
R_K	0,0 %	0,5 %	0,7 %	0,3 %
Kvalitetsomkostninger (fejl)	129 tkr	52 tkr	60 tkr	31 tkr
Kvalitetsomkostninger (ialt)	567 tkr	462 tkr	242 tkr	453 tkr

Tabel 4: Beregnede kvalitetsomkostninger og data ved eksemplerne behandlet i teksten. Fremhævede tal viser hvor der er foretaget en ændring.

Måleteknikeren har ligeledes undersøgt muligheden for optimeringer og kigget på procedurer og udstyr. Resulatet af disse sonderinger er, at det øjensynligt vil være muligt at reducere måleusikkerheden via en ændring som gør opspændingen mere stiv og ændrer usikkerhedsbidraget fra 0,1 mm til 0,05 mm. u_{fixtur}, for fixturet bliver således nu 0,05 mm / √3 = 0,029 mm.

Range på måleuret reduceres ligeledes fra 50 mm til 20 mm, hvorefter $u_{datalink}$ bliver 0,005 mm.

Den kombinerede standard usikkerhed beregnes derefter til

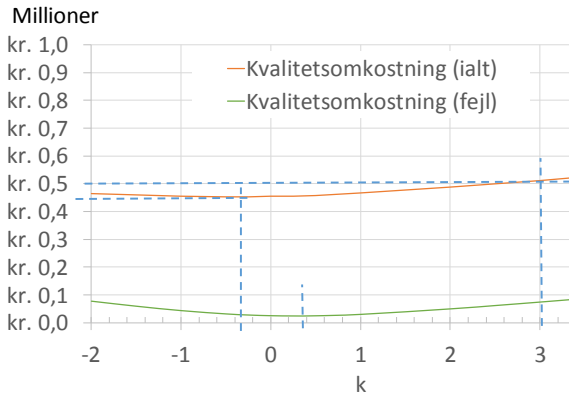
$$u = \sqrt{{u_{fixtur}}^2 + {u_{måleur}}^2 + {u_{datalink}}^2}$$

$$= \sqrt{0{,}029^2 + 0{,}025^2 + 0{,}005^2}$$

$$= 0{,}039\ mm$$

Figur 21 og kolonne 4 i tabel 4 viser resultatet fra den forbedrede måleteknik.

Med forbedret måleusikkerhed er det således lykkedes at finde en marginal forbedring af tabet fra 462 tkr til 453 tkr.



Figur 21: Tab ved forskellige valgte værdier af skaleret måleusikkerhed, hvor acceptgrænser er korrigerede i forhold til tolencen med $U_m=k*u_m$. Måleteknikken er forbedret således at u_m reduceres fra 0,063 mm til 0,039 mm.

Da dette undervisningsmateriale omfatter ikke detaljerede økonomiske beregninger, så er der ingen konklusion på disse overvejelser. Fabrikschefens beslutning lader vi derfor stå som et åbent diskussionsemne.

5 Generelle betragtninger

Teknikken til fastlæggelse af risikobetragtninger kan anvendes til at lave diagrammer og lignende for generelle risici. Dette vil dog ikke blive gjort i dette dokument, da det ikke ændrer ved budskabet.

Der er to vigtige parametre, som kan justeres af producenten. Man kan forbedre produktionen således at flere emner er født indenfor tolerancen. Alternativt skal man være god til at lave målinger. En dårlig produktion og manglende evne til at måle er den sikre vej til store udgifter eller manglende fremtidige ordrer.

Kunderisikoen, som afspejler mængden af emner som desværre kommer ud til kunden, kan altid reduceres ved at anvende en tilstrækkelig stor skalering af måleusikkerheden i forbindelse med fastlæggelse af acceptgrænserne. Den negative side er at det samtidigt medfører en øget kassation af gode emner. Denne fejl kan igen reduceres ved at forbedre måleteknikken.

Producentrisikoen, som afspejler mængden af emner om desværre bliver kasseret fejlagtigt, kan ligeledes reduceres ved at forbedre en måleteknik.

Produktionsevnen til at producere indenfor en tolerance kan måske forbedres og derigennem reducere omkostninger til kassation. Men det er vigtigt at huske at produktionsapparatet er sliddele og skal udskiftes med passende mellemrum for at kunne producere med ønsket lav spredning på produktionen. Kontrollen af sliddelene sker via måleudstyr.

Nøgleordet er således måleusikkerhed – det vil sige valg af måleudstyr og håndtering af samme. Både måleudstyret, omgivelserne for kontrolmålingerne og måleteknikerens træning og kompentence har alle en indflydelse på måleusikkerheden.

Som det fremgår af den tænkte produktion af aksler på tabel 4, så kan selv små ændringer betyde en del for firmaets bundlinie.

Bemærk hvor lille en variation der på acceptintervallet i tabel 3 og tabel 4. Personlig omhu under kontrolmålng er lige så vigtigt som måleudstyret.

Det essentielle er således at måleudstyrets nøjagtighed og dets håndtering er vigtige for kvalitetssikringen. Om måleudstyret skal være 1:10, 1:5 eller noget helt andet i forhold til tolerancen afhænger helt af den specifikke situation. Det er dermed underforstået at det også er en central kompentence at kunne etablere et fyldestgørende usikkerhedsbudget for en kontrolmåling.

Figur 14 illustrerer det fænomen at målingens kvalitet (usikkerhed) i forhold til tolerance er vigtigt at kende, hvis man vil forvisse sig om et måls overholdelse af en tolerance.

Den traditionelle 1:10 valg betyder at den målte værdi skal være indenfor de midterste 2/3 af toleranceintervallet. Med et 1:50 forhold skal den målte værdi være indenfor ca 92 % af intervallet. Yderligere forbedringer på måleudstyret vil ikke give større forbedringer på dette forhold.

Det er ved valg af måleudstyr vigtigt at der reflekteres over, **hvad** der skal måles og **hvor nøjagtigt** der skal måles. Risikobetragtninger vedrørende fejlslutninger er i den sammenhæng vigtige at medtage.

6 UEA5.xls

Der er udarbejdet et regneark, som kan anvendes til hurtig illustration af de centrale emner i dette dokument.

6.1 "Målte værdier og fordeling"

Faneblad 1 omfatter fordeling af måleresultatere samt en lettere statistisk analyse. Input til disse beregninger er brugers egne data – faktiske eller simulerede. Disse kopieres ind i kolonne A – husk at slette gamle data.

Simulering af normalfordelte data kan i Excel gøres med beregningen *NORMINV(RAND();A;B)* og i et stort antal celler. Excel tager udgangstpunkt i

tilfældige tal via RAND() og fordeler disse i forhold til en middelværdi A og med en spredning B.

Der er i regnearket anvendt 75.000 data således at disse simulerer samme fordeling som vist på figur 1.

Figur 23 viser fordelingen af data fra simuleringen. Den stiplede line er fordelingen fra figur 1.

6.2 "Tolerancer og acceptgrænser"

Faneblad 2 anvendes dels til at illustrere sammenhængen imellem sandsynlighed for overholdelse af tolerance ved forskellige måleusikkerheder (figur 14). Derudover anvendes fanebladet til beregne riskofordelingen (figur 15) ud fra den angivne måleusikkerhed, skaleringsfaktor k samt datasættes indsat på faneblad 1.

Input til dette ark er tolerancegrænserne for produktet opmålt i faneblad 1, samt måleusikkerheden og ønsket skaleringsfaktor. Bemærk at det antages at måleusikkerheden er normalfordelt. Der er ligeledes ikke medtaget en assymetrisk fordeling, som i de tilfælde at parameteren er rundhed. I sådanne tilfælde skal regnearket anvendes med forsigtighed.

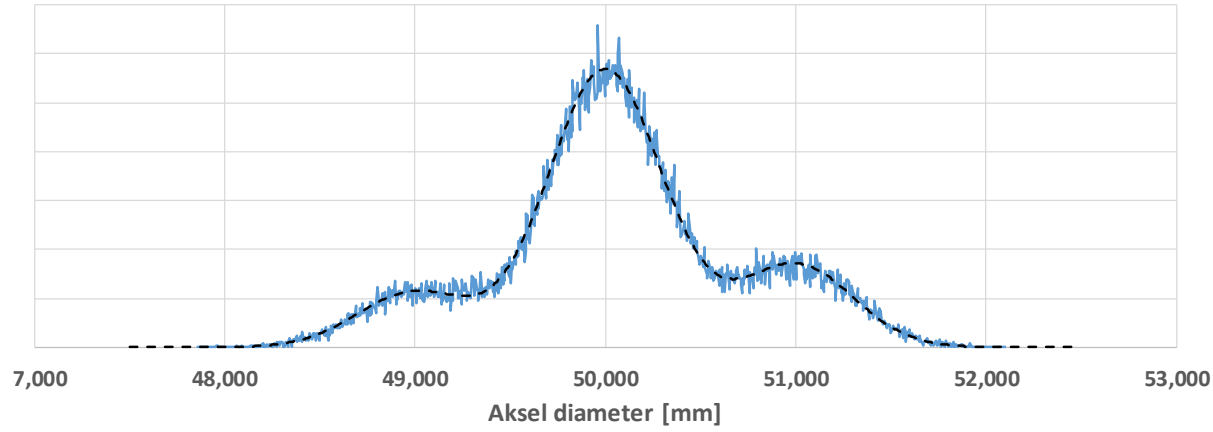
6.2.1 Kolonne N-AA

Det er valgt at opdele måledata fra faneblad 1 i 1000 intervaller. Kolonnerne O, P og Q beregner således antallet af hits i hvert interval. Kolonne P er basis for den akkumulerede sandsynlighed.

Kolonnerne R, S, T og U fordeler måleintervallerne således at der klart fremgår hvilke som er indenfor hhv. tolerancen eller acceptgrænserne (tilsvarende intervaller, som er udenfor).

Kolonne V beregner sandsynligheden for at en målt værdi er udenfor toleranceintervallet under den forudsætning at den målte værdi er en middelværdi og ved at måleusikkerheden anvendes som standardafvigelse i excel funktionen *NORM.DIST* (akkumulerende). Kolonne X beregner således den modsatte situation under forudsætning den samlede sandsynlighed er 1.

Kolonnerne X, Y, Z og AA er antallet af hits i hver af de fire grupper I, II , III og IV på figur 15. Der anvendes den beregnede sandsynlighed fra kolonne V og X til at fordele antallet af hits, hvilket gør at der kan optræde ikke-binære tal i disse kolonner.



Figur 23: Simuleret akselfordeling (blå) i forhold til foredleing anvendt på figur 1 (sort stiplet linie).

Litteraturliste

[1] BIPM, JCGM 100:2008 (GUM 1995 with minor corrections), Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement

[2] BIPM, JCGM 100:201X CD (Committee draft), Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement

[3] BIPM, JCGM 106:2012, Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment

[4] Sommer and Kochsiek, "Role of measurement uncertainty in deciding conformance in legal metrology", OIML Bulletin, Vol XLIII, nr. 2, pp. 19-24, April 2002

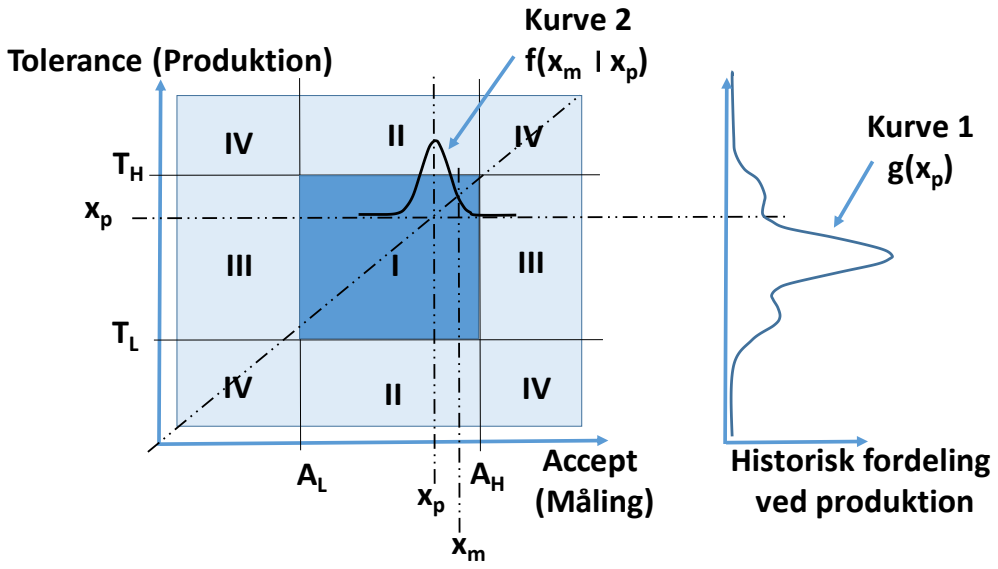
[5] Scott M. Nimbs, "Conformance Testing. Measurement Decision Rules", 2010 NCSL International Workshop and Symposium, 14th Edition, Longman Group, pp. 102-106, 1973

[6] Phillips et al, "Calculation of measurement Uncertainty Using Prior Information", J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol., Vol 103, pp. 625-632, 1998

[7] ISO/EN 14253-1: "Geometrical product specifications (GPS) -- Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment -- Part 1: Decision rules for proving conformity or nonconformity with specifications

[8] A3: "Introduktion til usikkerhedsbudgetter", Metrologi.dk

Appendix 1 – Beregning af risiko



Figur 24: Udfaldsrum for en parameter i forhold til tolerance og acceptgrænse. Kurve 1 illustrerer den historiske fordelingen af emner i forhold til tolerancen. Kurve 2 illustrerer sandsynligheden for den sande værdi i forhold til en opmålt værdi.

Beregning af risiko kan foretages, når der er fastlagt en fordeling af de producerede emner samt måle-udstyrets usikkerhed.

Fordelingen af de producerede emner er enten gættet eller baseret på historiske opmålinger.

Måleudstyret usikkerhed er baseret på usikkerheds-budgetter og kalibreringsdata.

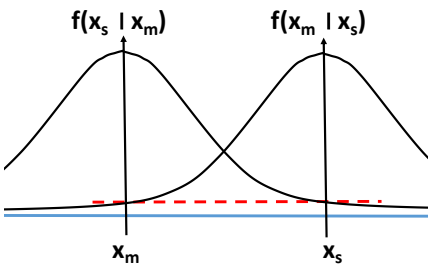
Figur 24 viser det samlede udfaldsrum. Dette er også illusteret på figur 15.

Kurve 1 er sandsynlighedsfordelingen for at en tilfældig udtaget produceret aksel har en værdi x_p. Denne funktion benævnes i dette dokument med $g(x_p)$.

Kurve 2 illustrerer sandsynligheden for at den målte værdi er x_m selv om den sande værdi er x_p. Kurve 2 beskrives matematisk som $f(x_m \mid x_p)$ og skal forstås som *sandsynligheden for en værdi x_m, når x_p er kendt som middelværdi*.

Normalt udtrykker måleusikkerhed sandsynlighed for at den sande værdi er forskellig fra den målte værdi. I kurve 2 er der anvendt den omvendte betragtning – nemlig at måleusikkerhed beskriver sandsynlighed for at den målte værdi er forskellig fra den sande værdi. Dette er korrekt for symmetriske måleusikkerheder såsom den normaltfordelte usikkerhed.

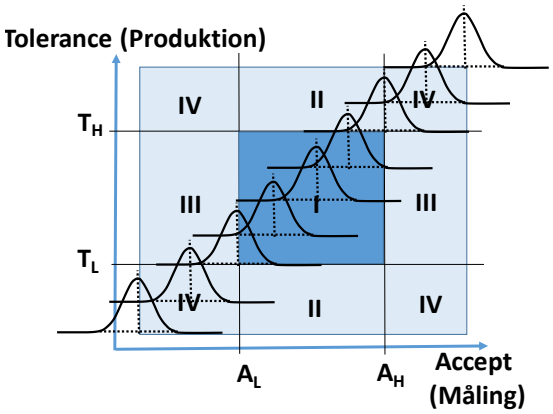
Ved asymmetri på måleusikkerheden skal der tages højde for dette. Haves for eksempel en asymmetrisk sandsynlighedsfordeling $h(\Delta x)$, så gælder at $h(\Delta x_{mp}) = h(-\Delta x_{pm})$. Δx_{pm} er lig $x_p - x_m$ (sand værdi i forhold til målt værdi) og Δx_{mp} er lig $x_m - x_p$ (målt værdi i forhold til sand værdi). Se figur 22.



Figur 25: Normaltfordelinger alt efter udgangspunkt i den målte eller sande værdi.

Ved forskellige værdier af x_p sandsynlighedskurven for sande værdi flytte sig og danne en diagonal. Dette er illustreret på figur 24.

Som det umiddelbart kan ses er sandsynligheden for at en aksel er større end tolerancen men målt under laveste acceptgrænse ikke en mulighed med mindre at måleusikkerheden er meget stor i forhold til toleranceintervallet.



Figur 26: Sandsynlighedsfordelinger for den sande værdi ved forskellige værdier af x_p. Se også figur 21.

For at fastlægge antal udfald i hvert af den fire udfaldsrum - I, II, III og IV – foretages der derfor en beregning af sandsynligheden for den sande værdis placering ved et alle mulig værdier af x_p. Denne sandsynlighed ganges sandsynligheden for at værdien x_p fremkommer ved produktion (kurve 1, figur 24).

Matematisk skrives dette som

Formel 7:

$$F(x_A, x_T) = \int_{-\infty}^{x_A} \int_{-\infty}^{x_T} g(x_p)\, f(x_m \mid x_p)\, dx_m\, dx_p$$

hvor x_A og x_T er vilkårligt valgte værdier på henholdsvis accept og tolerancer akserne.

Ønskes et interval foretages en beregning af den akkumulerede værdi ved begge grænser, hvorefter værdien for intervallet vil være forskellen imellem de to akkumlerede værdier. Matematisk skrives dette som

Formel 8:

$$F(I) = \int_{A_L}^{A_H} \int_{T_L}^{T_H} g(x_p)\, f(x_m \mid x_p)\, dx_m\, dx_p$$

Kunderisiko, R_K, er områderne på figurene 13, 21 og 23 markeret med II. Disse beregnes som

Formel 9:

$$R_K = \left(\int_{-\infty}^{T_H} + \int_{T_L}^{\infty} \right) \int_{A_L}^{A_H} g(x_p)\, f(x_m \mid x_p)\, dx_m\, dx_p$$

Producentrisiko, R_P, er områderne på figurene 13, 21 og 24 markeret med III. Disse beregnes tilsvarende som

Formel 10:

$$R_P = \left(\int_{-\infty}^{A_L} + \int_{A_H}^{\infty} \right) \int_{T_L}^{T_H} g(x_p)\, f(x_m \mid x_p)\, dx_m\, dx_p$$

Numerisk integration

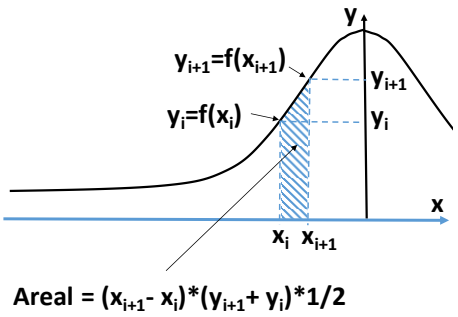
Formlerne 11-14 indeholder funktioner af typen

Formel 11:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)\, dx$$

Den praktiske løsning er at opdele x-værdierne i specifikke intervaller, beregne arealet under kurven og efterfølgende summere bidragene fra alle intervaller.

Figur 27 viser en grafisk fortolkning af integrations-metoden for et interval.



Figur 27: Beregning af areal med diskrete værdier.

Appendix 2 – Excel/VBA til risikoberegning

Dobbeltintegraler er ikke en standardfunktionalitet i excel. Der skal derfor anvendes en opsplitning af udfaldsrummet i specifikke intervaller eller lignende. VBA kan avnedes til at programmere og etablere egne funktioner i excel. Dette appendix beskriver to funktioner til hjælp for beregninger.

Funktionen ***GaussPDF(x,y_nul,u_x)*** beregner normalfordelingen (tæthed) ved en værdi x under forudsætning af en middelværdi, y_nul og en standard usikkerhed på u_x. Denne findes også som funktion direkte i excel.

```
Function GaussPDF(ByVal x As Double, ByVal y_nul As Double, ByVal u_x As Double) As Double
' Gauss sandsynlighedsfordeling
GaussPDF = Exp((-((x - y_nul) / u_x) ^ 2) / 2) / (u_x * (2 * 3.14157) ^ 0.5)
End Function
```

Funktionen ***GaussGauss(x, sp, T1, T2, um, A1, A2)*** anvendes til at beregne risiko under den forudsætning at produktionen kan beskrives som normalfordelt med ***x*** som middelværdi og standardafvigelsen ***sp*** (u_T anvendt som notation i makroen). Måleusikkerheden antages at være normalfordelt med standardusikkerheden ***um*** (u_m anvendt som notation i makroen).

Ved angivelse af intervalgrænserne for hhv. tolerance (T1, T2) og acceptakserne (A1, A2) vil funktionen fremkomme med den sandsynlighed for at en værdi er i intervallet. Ganges med antallet af emner i en serie, vil der således kendes antallet af udfald indenfor de givne grænser.

Ved beregning fra "uendelig" er det tilstrækkeligt at anvende seks gange standardusikkerheden for at få alle udfald med. Bemærk at der antages symmetrisk normalfordeling omkring gennemsnittet. Det bør dog være nem for den studerende at indsætte vilkårlige funktioner til beskrivelse af fordelinger.

```
Function GaussGauss(ByVal X As Double, ByVal u_T As Double, ByVal T1 As Double, ByVal T2 As Double, ByVal u_m As
Double, ByVal A1 As Double, ByVal A2 As Double) As Double

'Funktion til beregning af akkumuleret sandsynligheder
Dim DeltaA, DeltaT, YC, YC1, YC2, YD1, YD2, Tvalue, Tsum, Avalue, Asum As Double
Dim Sections, iA, iT As Integer
Sections = 500
DeltaA = (A2 - A1) / Sections
DeltaT = (T2 - T1) / Sections
Tsum = 0

'Beregning af første integrale langs mindste tolerance, T1.
Tvalue = T1
Asum = 0
For iA = 1 To Sections
Avalue = AL + (iA - 1) * DeltaA
YD1 = GaussPDF(Avalue, Tvalue, u_m)
YD2 = GaussPDF(Avalue + DeltaA, Tvalue, u_m)
YD = (YD1 + YD2) / 2
Asum = Asum + YD * DeltaA
Next iA
YC1 = Asum * GaussPDF(Tvalue, X, u_T)
```

```
'Beregning af øvrige ingraler ved forskellige værdier indenfor tolerance
For iT = 2 To Sections + 1
Tvalue = TL + (iT - 1) * DeltaT
Asum = 0
For iA = 1 To Sections
Avalue = AL + (iA - 1) * DeltaA
YD1 = GaussPDF(Avalue, Tvalue, u_m)
YD2 = GaussPDF(Avalue + DeltaA, Tvalue, u_m)
YD = (YD1 + YD2) / 2
Asum = Asum + YD * DeltaA
Next iA
YC2 = Asum * GaussPDF(Tvalue, X, u_T)
Tsum = Tsum + (YC1 + YC2) / 2 * DeltaT
YC1 = YC2
Next iT

GaussGauss = Tsum
End Function
```