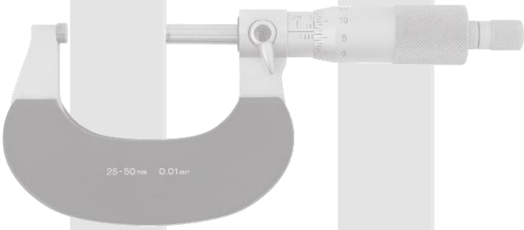
GRAFISK INTRODUKTION TIL FOURIERRÆKKE-TRANSFORMATIONEN

UNDERVISNINGSELEMENT

E2

—

UNDERVISNING
I MÅLETEKNIK

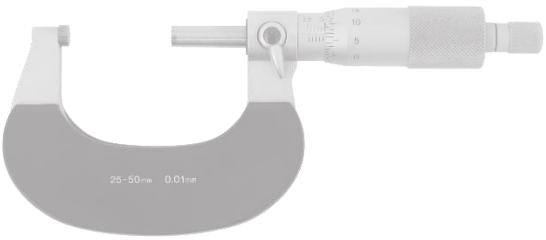


metrologi.dk

GRAFISK INTRODUKTION TIL FOURIERRÆKKE-TRANSFORMATIONEN

Knud A. Baltsen, FORCE Technology

2. udgave – Maj 2017, redigeret september 2019



Indholdsfortegnelse

1 Indledning

1.1 Om dette undervisningselement (UE)

I dette modul foretages en grafisk relateret analyse for at belyse sammenhængen mellem tids- og frekvensdomænerepræsentation. I den nødvendige udstrækning suppleres med analytiske udtryk for at opnå resultater, som giver realistisk overensstemmelse mellem observationer og teori.

1.2 Læringsudbytte af dette UE

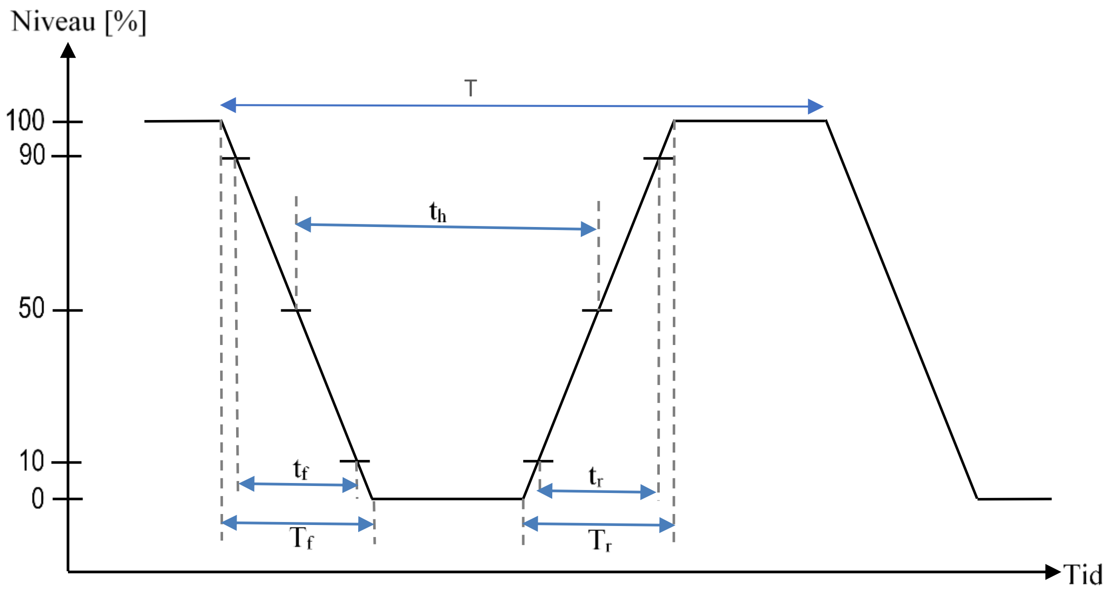
- At introducere begreberne tids- og frekvensdomænerepræsentation
- At behandle Fourier-række transformationen overvejende grafisk, men suppleret med analytiske udtryk, således at konverteringen fra tidsdomæne til frekvensdomæne gøres umiddelbar intuitiv og forståelsesmæssig meningsfuld
- At sammenligne de fremkomne teoretiske resultater med målinger for derved at gøre teorien plausibel og troværdig

1.3 Forudsætninger

- At læseren har basal viden om virkemåden for et oscilloskop og en spektrumanalysator
- At læseren har basal viden om de trigonometriske funktioner cosinus og sinus
- At læseren har basal viden om integrationsteknik

2 Det digitale signal

Ved figur 1 introduceres de tidsmæssige begreber for et forenklet digitalt signal, som er nødvendige for den videre behandling. Det digitale signal er forenklet, idet de skarpe knæk ikke vil optræde for praktiske digitale signaler. Der vil her altid optræde forskellige ind- og udsvingningsforløb, som vist ved figur 2.



Figur 1. Tidsmæssige begreber for et forenklet digitalt signal.

For figur 1 gælder (med engelske begreber i parentes)

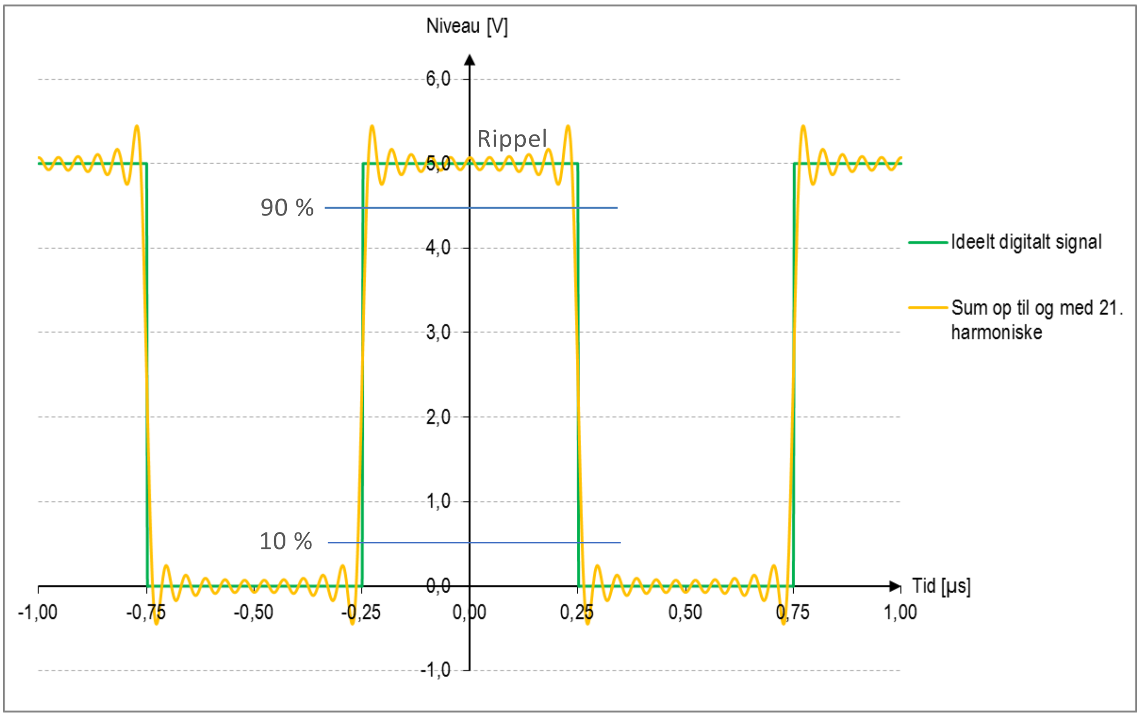
T : Periodetiden (period value)
t_h : Halvværditiden (half time value)
t_f : Faldtiden (fall time) fra 90 % af højeste niveau til 10 % af højeste niveau
T_f : Faldtiden (fall time) fra 100 % af højeste niveau til 0 % af højeste niveau
t_r : Stigtiden (rise time) fra 10 % af højeste niveau til 90 % af højeste niveau
T_r : Stigtiden (rise time) fra 0 % af højeste niveau til 100 % af højeste niveau

Duty cycle : Forholdet $\frac{t_h}{T}$

I praksis anvendes udelukkende t_f – og t_r -værdierne, idet det sædvanligvis er betydeligt nemmere at fastlægge niveauerne for 10 % og 90 % for det digitale signal, idet rippelen (ind- og udsvingningsforløbet) sjældent interfererer med 10 % og 90 % niveauerne. Dette er vist ved de indtegnede 10 % og 90 % grænser på figur 2. Her er t_f – og t_r -værdierne entydige for det digitale signal, mens T_f – og T_r -værdierne ville være flertydige (f.eks. passeres 100 % værdien flere gange i tidsintervallet – 0,25 µs til 0,0 µs).

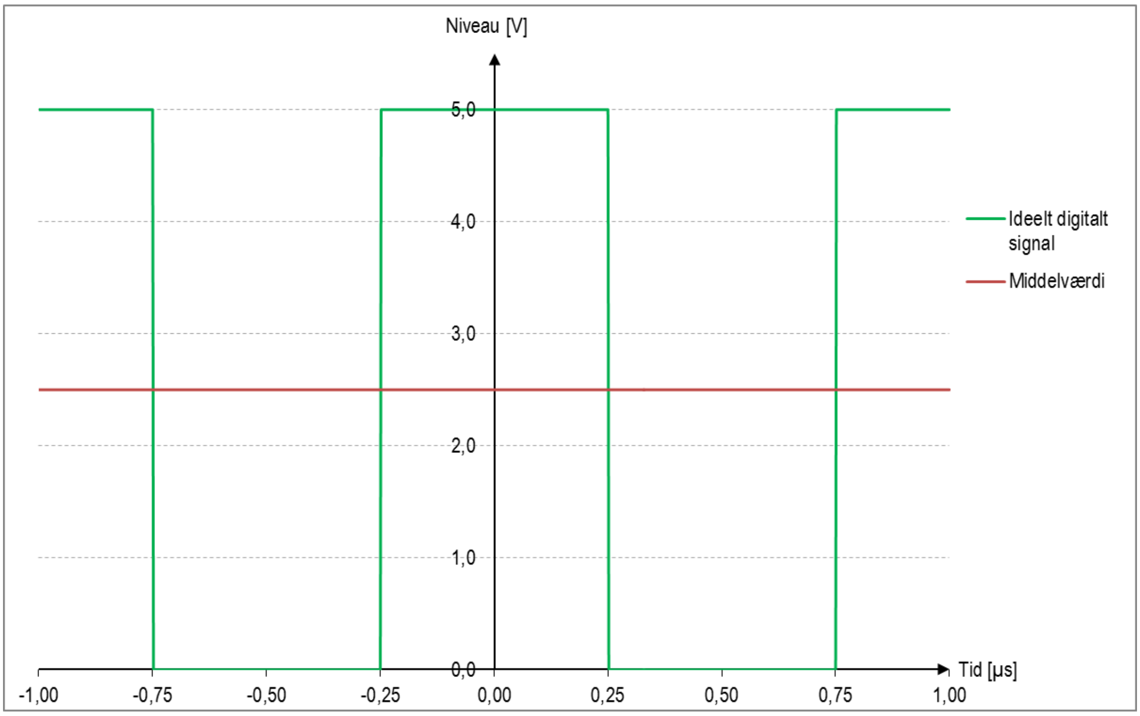
I hele den følgende behandling anvendes for beregningsmæssig nemhed dog T_f – og T_r – værdierne.

3 Ideelt digitalt signal med duty cycle = 50 %



Figur 2. Et ideelt og mere praktisk forekommende digitalt signal med rippel (ind- og udsvingningsforløb).

Figur 3 viser et eksempel på et digitalt signal, som er ideelt, dvs. $t_f = T_f = t_r = T_r = 0$ (der skiftes momentant fra høj tilstand (5,0 V) til lav tilstand (0,0 V) og omvendt).



Figur 3. Digitalt spændingssignal i tidsdomænerepræsentation.

Selv om figur 3 kun viser et tidsforløb på i alt 2,00 µs forudsættes, at der er tale om et periodisk forløbende digitalt signal (det gentager sig selv mange gange) med en total tidsmæssig udstrækning meget større end de 2,00 µs. Den tid det tager for signalet for at gentage sig selv er periodetiden T, og den ses at være T = 1,00 µs. Her er der altså tale om et digitalt signal med den digitale frekvens $f_D = 1/T = 1{,}00$ MHz.

For halvværditiden t_h gælder $t_h = T/2 = 0{,}50$ µs.

Tidspunktet t = 0,00 µs er placeret midt på den horisontale akse. Med et moderne digitalt oscilloskop kan man vælge at placere dette tidspunkt hvor man vil, - denne placering bevirker, at det digitale signal er spejlsymmetrisk mht. den vertikale akse (det digitale signal er hermed en lige funktion, det samme som gælder f.eks. for en cosinus-funktion). Hermed opnås en tidsmæssig symmetri, som senere vil blive udnyttet.

Spændingsintervallet A, som det digitale signal bevæger sig over er 5,0 V. Hvis signalet blev ensrettet ideelt vil man få middelværdien a_0. Man kan umiddelbart her indse, at $a_0 = A/2 = 2{,}5$ V. Man kan definere den digitale amplitude a_D som det symmetriske spændingssving ud fra a_0, - for signalet i figur 1 er $a_D = 2{,}5$ V.

Det ovennævnte foregår altså i det, som defineres som tidsdomænet, - der er tale om et forløb hen over tiden. Et begreb, som supplerer tidsdomænet er frekvensdomænet. Som navnet antyder udskifter man tidsaksen med en frekvensakse. I frekvensdomænet har man altså en række af rene svingninger, hvis frekvensværdier vises ud af den horisontale akse. Den vertikale akse i frekvensdomænet viser en signalstørrelse, - der er altså altid tale om en positiv eller en 0-værdi. Typisk vises de rene svingningers amplitude. Dette er en forskel i forhold til tidsdomænet, hvor man har mulighed for en polaritetsangivelse. De to begreber er illustreret ved figurerne 4 og 5, og det er faktisk sådan, at det digitale signal i tidsdomænerepræsentationen figur 4 matcher frekvensdomænerepræsentation som vist ved figur 5.

Signalet vist ved figur 3 vil danne basis for hele den følgende behandling med følgende faste parametre:

- A = 5,00 V (begyndende ved 0,00 V og sluttende ved 5,00 V)
- $f_D = 1{,}00$ MHz.

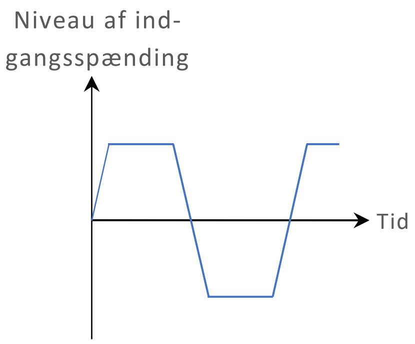
Der vil blive varieret på følgende parametre:

- Stig- og faldtiderne T_r og T_f
- Duty cycle

4 Tidsdomæne og frekvensdomæne

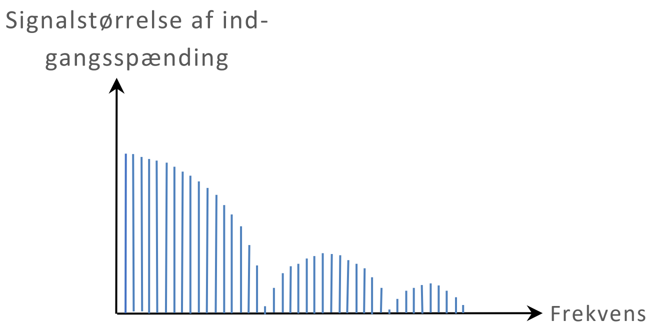
Ved tidsdomænerepræsentation vises et tidsmæssigt forløb af et signal. Det mest typiske måleinstrument, som udfører tidsdomænerepræsentation er et oscilloskop, der jo viser det tidsmæssige forløb af en indgangsspænding.

Tidsdomæne



Figur 4: Signal i tidsdomænet

Frekvensdomæne



Figur 5: Den tilsvarende repræsentation i frekvensdomænet

Tidsdomænerepræsentationen og frekvensdomænerepræsentationen er to billeder af samme sag, og man kan transformere sig fra tidsdomænet til frekvensdomænet ved hjælp af det matematiske hjælpeværktøj benævnt Fourier-transformationen. Denne transformation vil optræde i den mest simple form, når der er tale om en omsætning af en tidsmæssig periodisk funktion, som det f.eks. ved figur 4 viste digitale signal. Man taler her om Fourier-række transformationen.

Et oscilloskop viser et tidsmæssigt forløb af målte spændingsniveauer, - det viser dermed tingene i tidsdomænet. Et instrument som en spektrumanalysator viser derimod et signal ved dets frekvensindhold og de enkelte frekvensers amplituder, - den viser dermed tingene i frekvensdomænet.

En spektrumanalysator kan kort beskrives som et måleinstrument, hvor indgangssignalet er en tidsvarierende spænding. Man kan anskue spektrumanalysatorens virkemåde ved, at denne besidder et båndpasfilter, hvis centerfrekvens er variabel og hele tiden sweeper hen over det frekvensområde man har valgt (den horisontale akse på figur 5). Størrelsen af spændingen af den frekvens, som passerer gennem båndpasfilteret vises tilsvarende op af den vertikale akse på figur 5.

Baptiste-Joseph Fourier's usandsynlige opdagelse

Fourier-transformationen er opkaldt efter den franske matematiker Baptiste-Joseph Fourier, som i 1822 opdagede den matematiske sammenhæng mellem signaler i tids- og frekvensdomænet i forbindelse med undersøgelser vedrørende varmeledning (altså ikke relateret til signalanalyse!). I [1] anføres, at Fourier ikke gav et matematisk korrekt bevis for opdagelsen, og opdagelsen forekom tidens førende matematikere at være så usandsynlig, at det i en længere årrække var umuligt for Fourier at få optaget sine artikler i de kendte tidsskrifter.

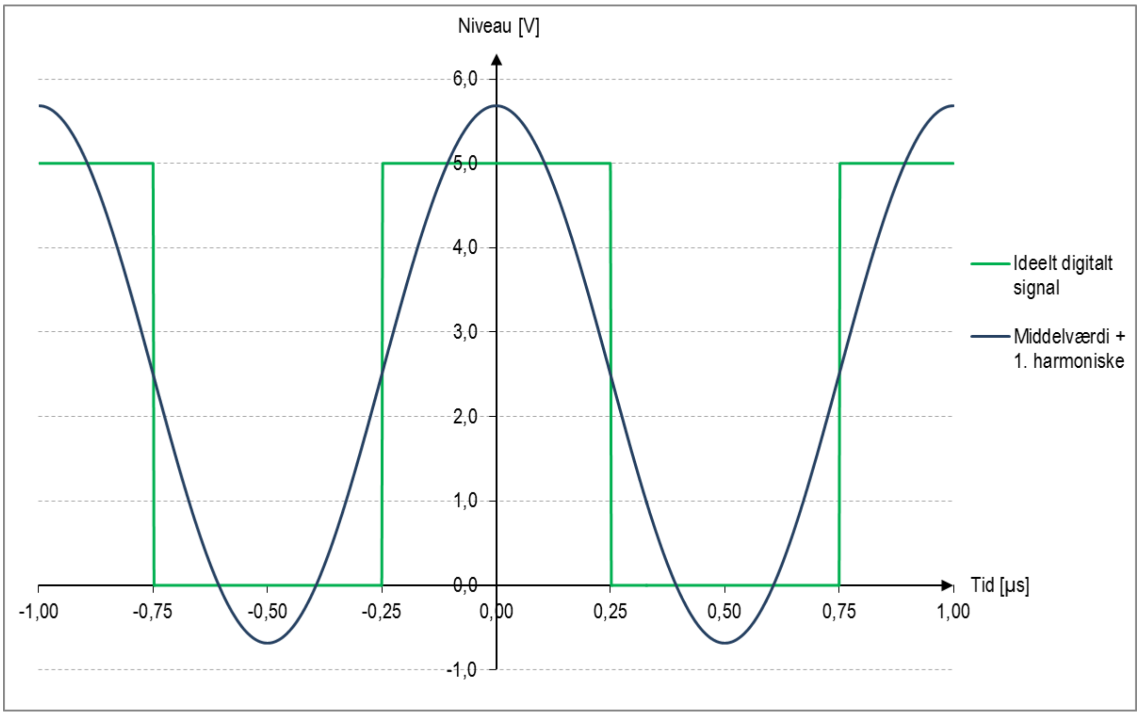
Det er da også tankevækkende, at Fourier udledte denne matematiske transformation set ud fra, at man først langt over 100 år senere, praktisk kunne begynde at anvende sammenhængen. En praktisk anvendelse af Fourier-transformationen (Fast Fourier Transform (FFT)) blev beskrevet i 1965, og den første kommercielt tilgængelige spektrum analysator baseret på anvendelse af dette princip, så først dagens lys i 1967 [2].

5 Grafisk tilgang til Fourier-række transformationen

Først udføres en grafisk tilgang til Fourier-rækketransformationen, dernæst tilføjes nødvendige matematiske beregninger.

Fourier's opdagelse, at en funktion f(t) periodisk i tiden t, kunne opbygges af en uendelig række af rene svingninger vil i det følgende blive efterprøvet på en "prøv-og-ret-fejl" basis.

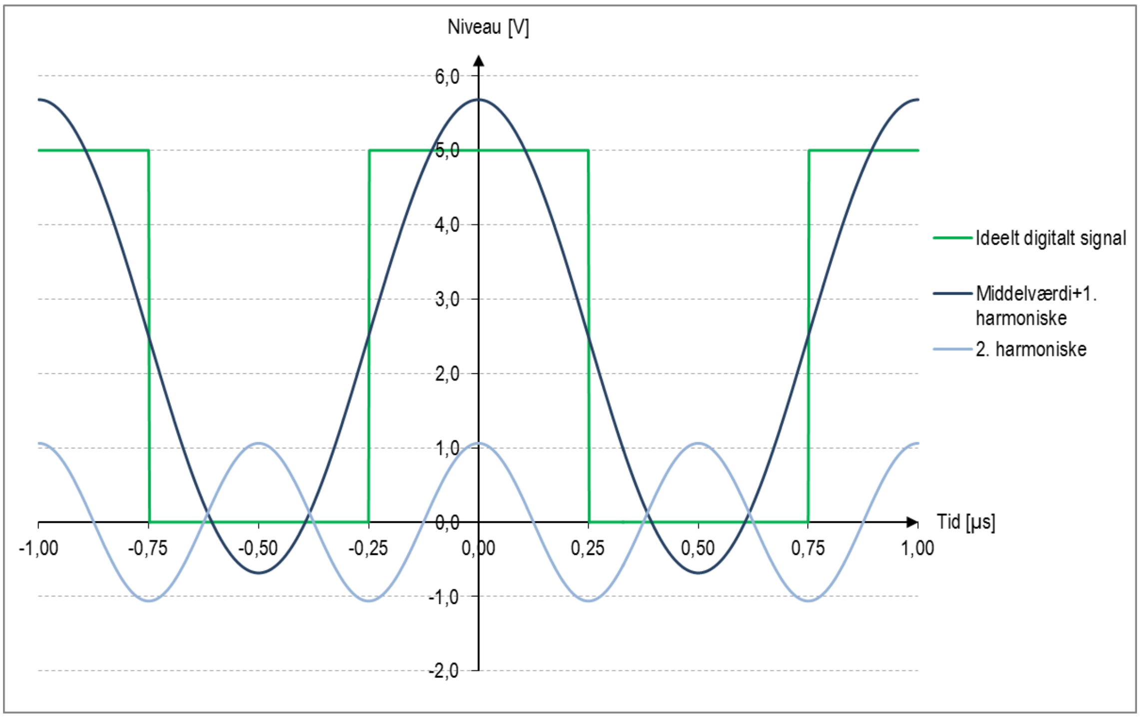
Først tilnærmes det ideelle digitale signal fra figur 3 med en ren svingning med frekvens f_1 lig med f_D = 1,00 MHz. Denne betegnes som den 1. harmoniske. Hermed fås figur 6.



Figur 6. Ideelt digitalt signal tilnærmet med ren svingning af samme frekvens.

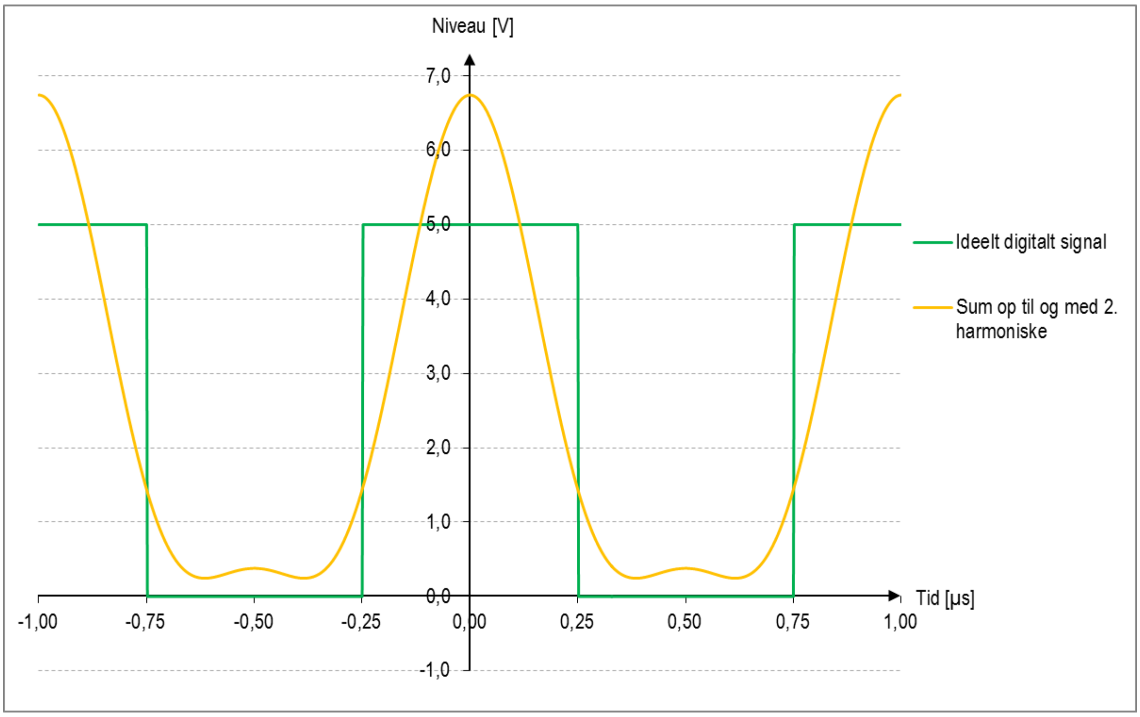
Fasen for den 1. harmoniske er valgt at have samme fortegn som det digitale signal for t = 0,00 µs. Det noteres, at den rene svingning har et valgt niveau større end det digitale signal f.eks. for t = 0,00 µs, og har lavere niveau f.eks. for t = – 0,50 µs og for t = 0,50 µs.

Dernæst tilføjes yderligere en ren svingning, - den 2. harmoniske, med frekvens f_2 = 2,00 MHz. Dette sker ved figur 7. Fasen er valgt at have samme fortegn som den 1. harmoniske for t = 0,00 µs.



Figur 7. 2. harmoniske tilføjet figur 6.

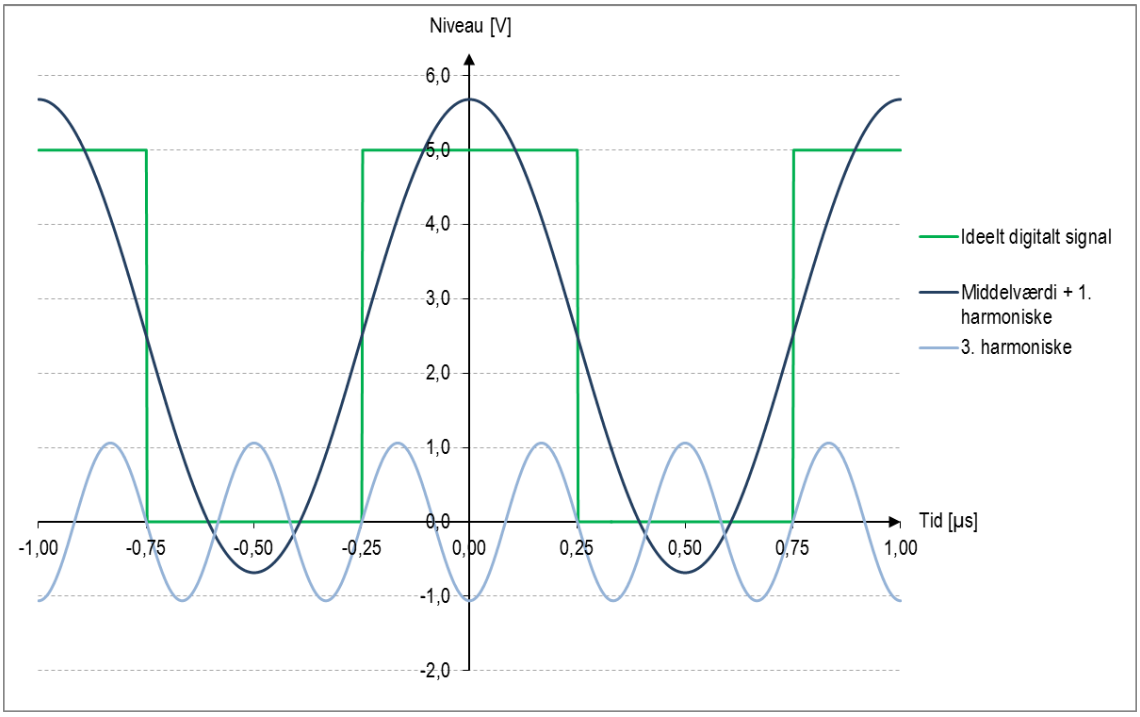
Resultatet af summationen er vist ved figur 8.



Figur 8. Ideelt digitalt signal tilnærmet med rene svingninger i form af 1. og 2. harmoniske.

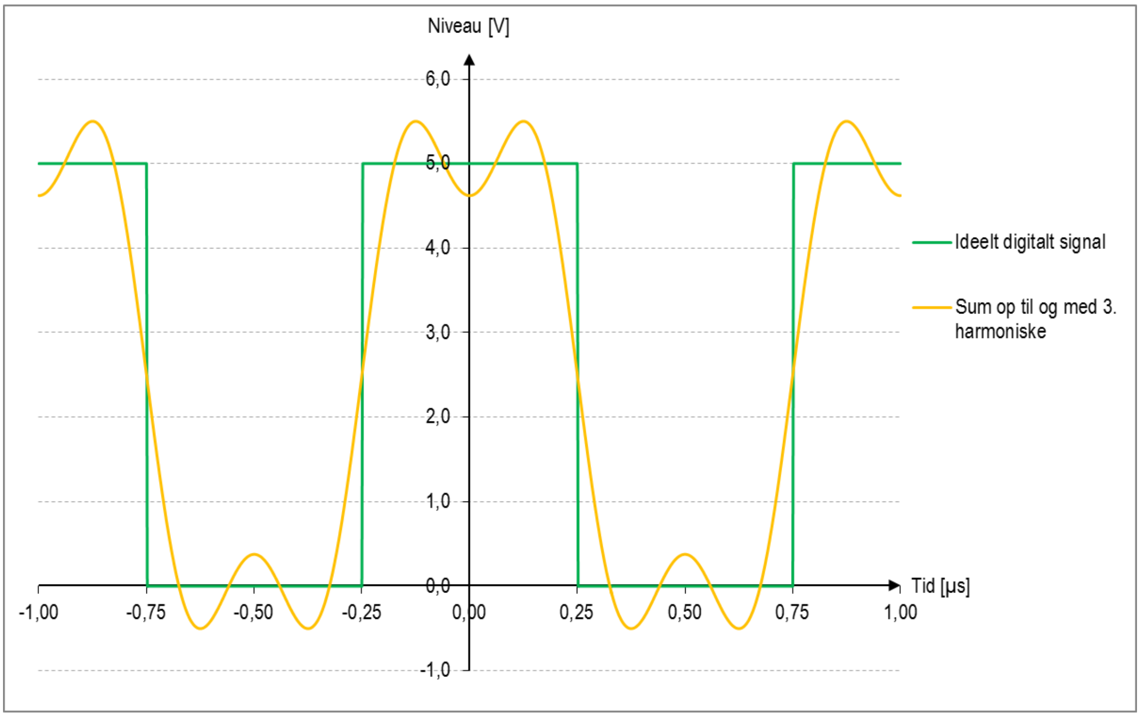
Her forbedres tilnærmelsen for de lave niveauer af det digitale signal, mens tilnærmelsen forværres for de høje niveauer. Vælges fortegnet omvendt kan man indse, at tilnærmelsen nu forbedres for de høje niveauer, mens det forværres for de lave niveauer. Dette er karakteristisk for en addition af den 2. harmoniske, så der vælges at se bort fra addition af den 2. harmoniske (amplituden sættes til at være 0).

Ved figur 9 er den 3. harmoniske f_3 = 3,00 MHz tilføjet. For at opnå en anvendelig summation, er dens fase valgt at have modsat fortegn i forhold til den 1. harmoniske for t = 0,00 µs.



Figur 9. 3. harmoniske tilføjet figur 6.

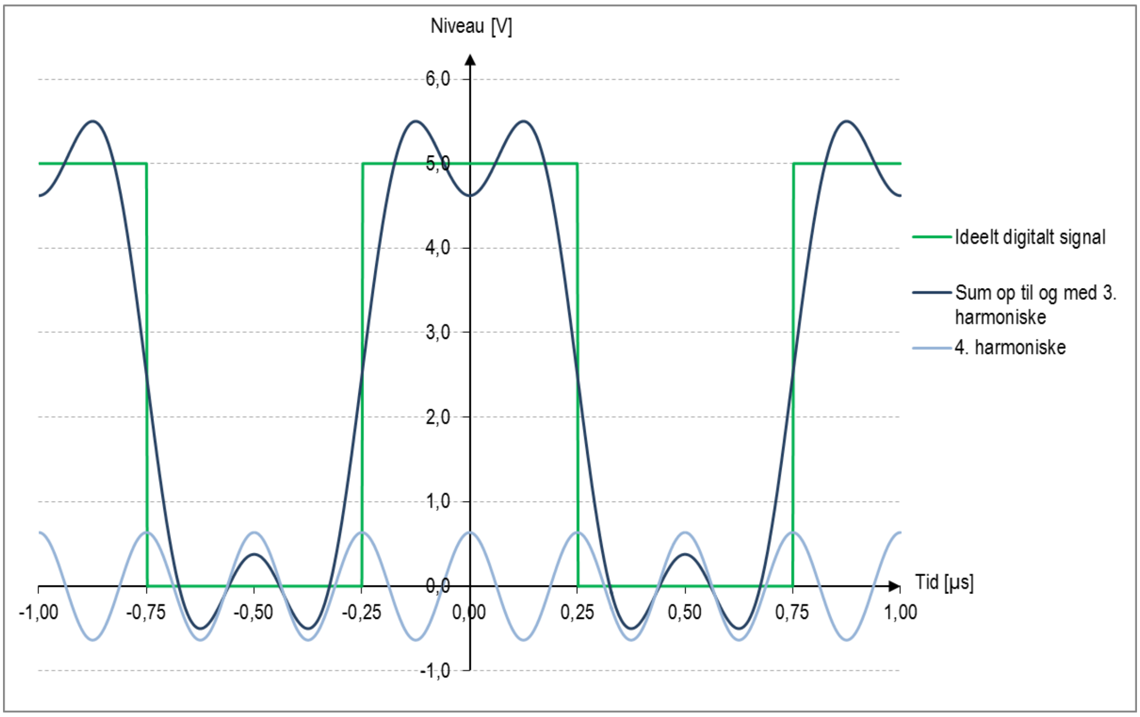
Resultatet af summationen er vist ved figur 10.



Figur 10. Ideelt digitalt signal tilnærmet med rene svingninger i form af 1. og 3. harmoniske.

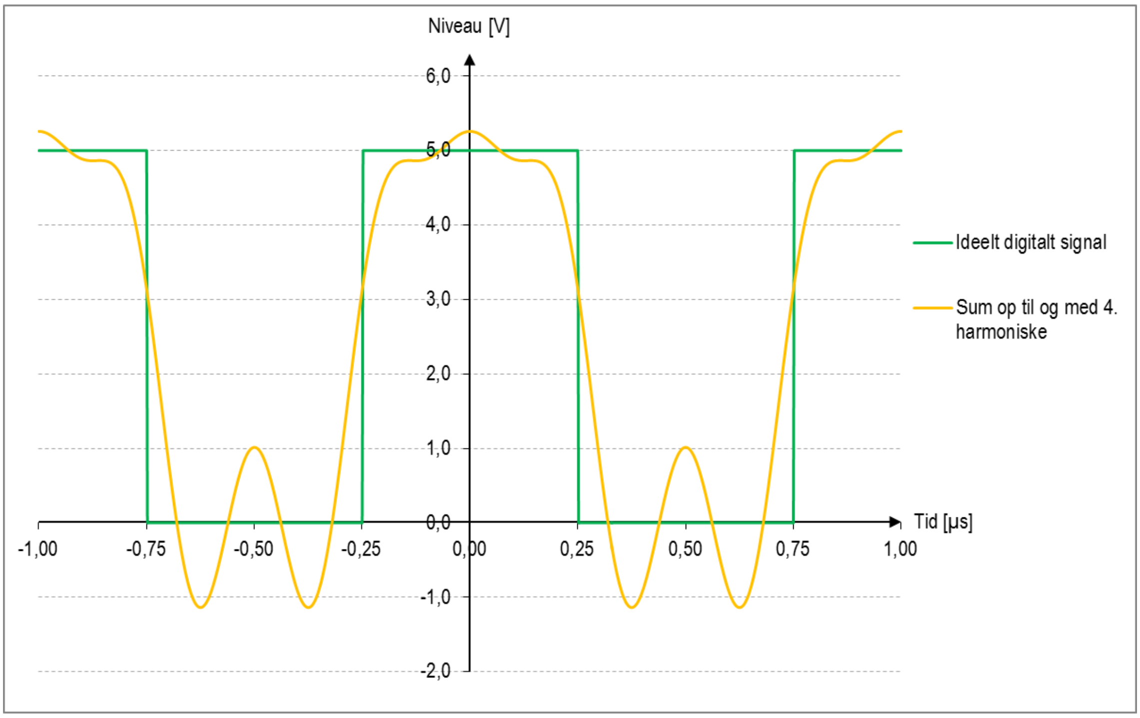
Tilnærmelsen forbedres for begge niveauer af det digitale signal.

Den 4. harmoniske, f_4 = 4,00 MHz tilføjes til figur 10. Dette sker ved figur 11. Fasen er forsøgsvis valgt at have samme fortegn som den 1. harmoniske for t = 0,00 µs.



Figur 11. 4. harmoniske tilføjet figur 10.

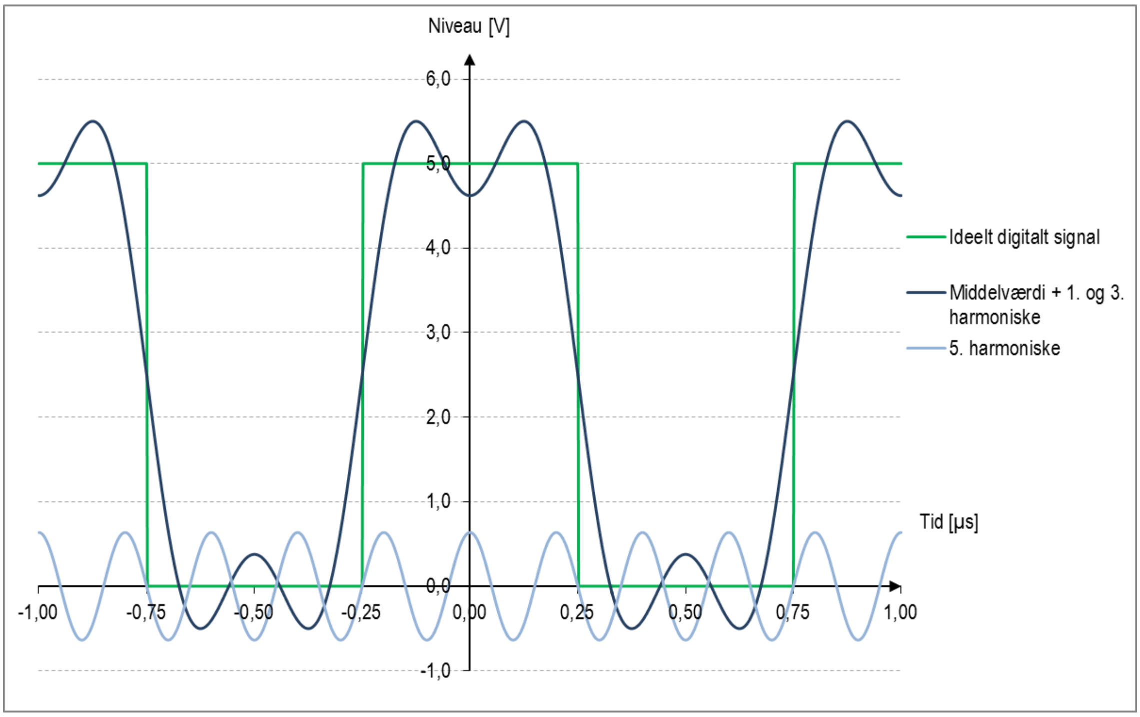
Resultatet af summationen er vist ved figur 12.



Figur 12. Ideelt digitalt signal tilnærmet med rene svingninger i form af 1., 3. og 4. harmoniske.

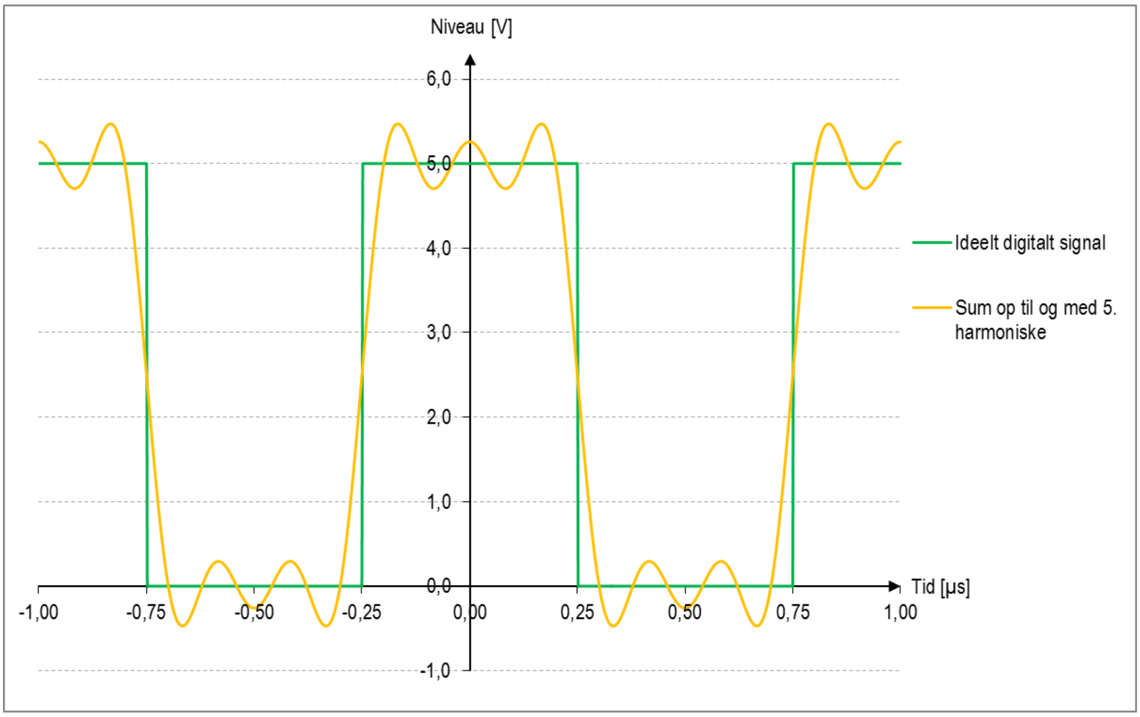
De samme forhold gør sig gældende som for additionen af den 2. harmoniske; enten forbedres tilnærmelsen for de høje digitale niveauer og forværres for de lave niveauer eller omvendt. Så her vælges ligesom for den 2. harmoniske at se bort fra den 4. harmoniske (amplituden sættes til at være 0).

Ved figur 13 er den 5. harmoniske f_5 = 5,00 MHz tilføjet til figur 10. Fasen er valgt at have det samme fortegn som den 1. harmoniske for t = 0,00 µs.



Figur 13. 5. harmoniske tilføjet figur 10.

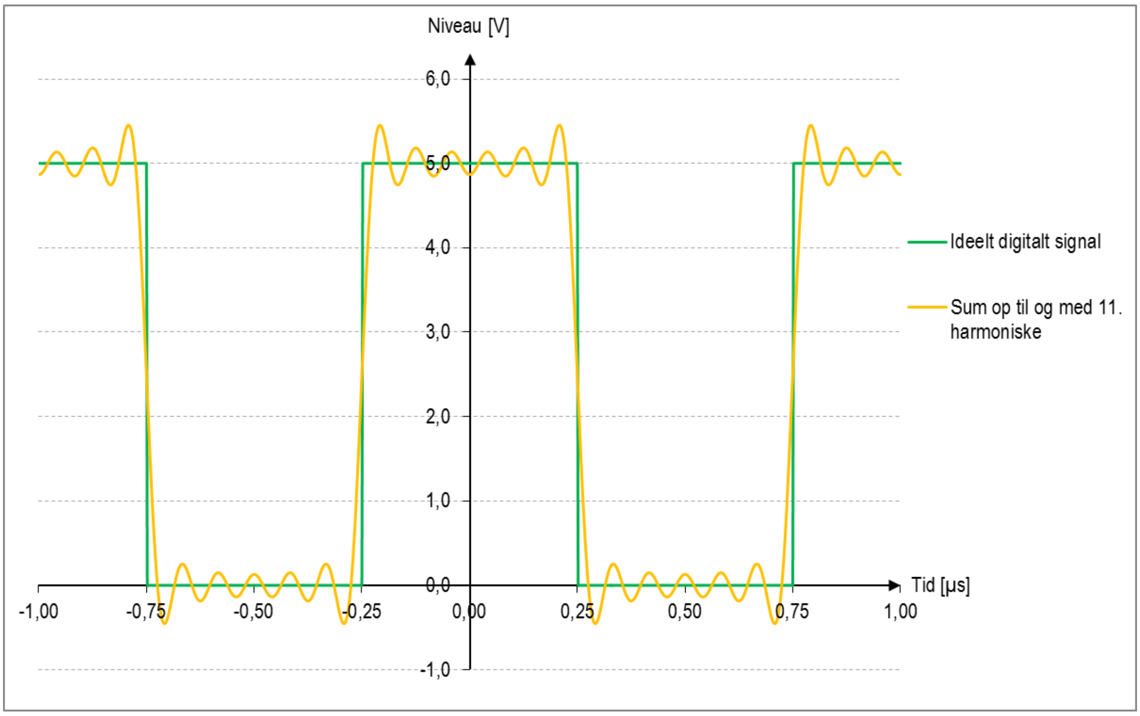
Resultatet af summationen er vist ved figur 14.



Figur 14. Ideelt digitalt signal tilnærmet med rene svingninger i form af 1., 3. og 5. harmoniske.

Additionen af 5. harmoniske forbedrer tilnærmelsen for begge niveauer af det digitale signal.

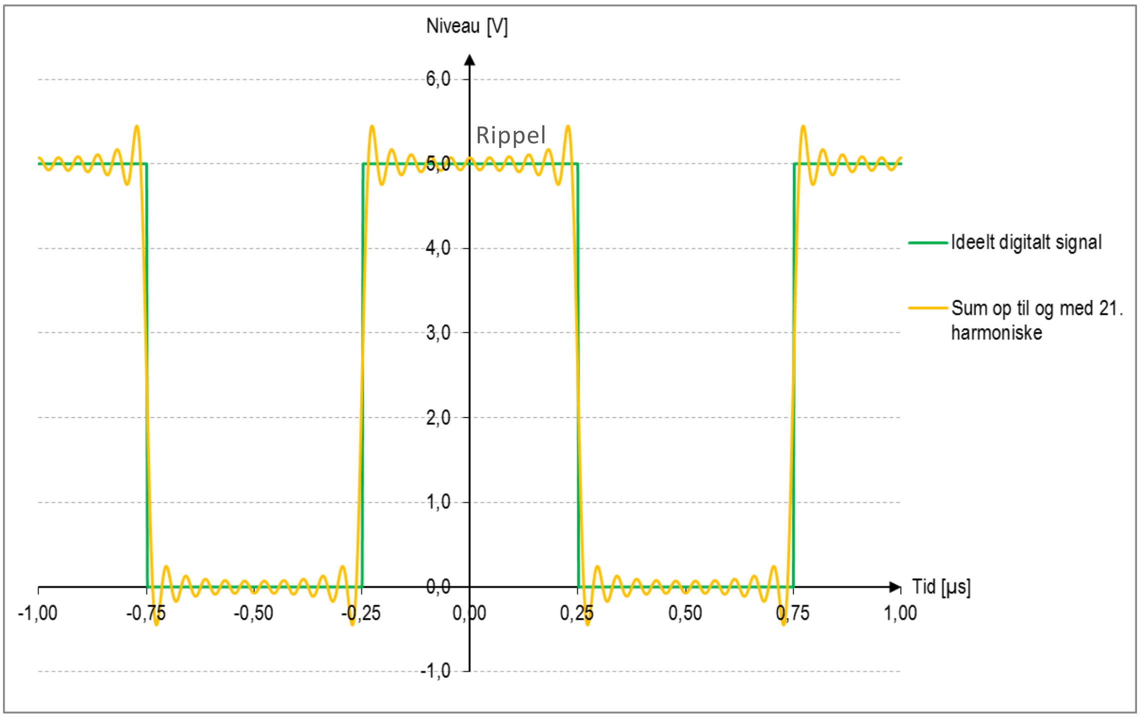
På baggrund af den foregående undersøgelse postuleres*), at tilnærmelsen udelukkende skal foretages med de ulige harmoniske, altså 3., 5., 7. osv. harmoniske, og der skal ske fortegnsskifte undervejs (således at 3., 7., 11. osv. harmoniske har omvendt fortegn i forhold til den 1. harmoniske for t = 0,00 µs, mens 1., 5., 9. osv. harmoniske har samme fortegn som 1. harmoniske for t = 0,00 µs). Der ses bort fra alle de lige harmoniske (2., 4., 6. osv.). Ved figur 15 er vist tilnærmelsen op til og med 11. harmoniske.



Figur 15. Ideelt digitalt signal tilnærmet med rene svingninger i form af 1. - 11. harmoniske.

*) Baggrunden for dette postulat spinkel, men her udnyttes, at slutresultatet kendes!

Endelig er ved figur 16 vist tilnærmelsen op til og med 21. harmoniske.



Figur 16. Ideelt digitalt signal tilnærmet med rene svingninger i form af 1. - 21. harmoniske.

Det ses, at tilnærmelsen bliver bedre og bedre jo flere af de ulige harmoniske (med passende fortegnsskifte), som medtages. Rippelen (ind- og udsvingningsforløbet) på samme niveau som den flade del af det ideelle signal er dog stadig markant, om end det meget langsomt formindskes jo flere bidrag som medtages.

6 En kombineret analytisk og grafisk tilgang til Fourier-række tilnærmelsen

Den matematiske sammenhæng mellem en tidsperiodisk og kontinuert funktion f(t) og en sum af rene svingninger (dvs. cosinus- og sin-funktioner) som Fourier opdagede i 1822 kan matematisk beskrives som

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega t),$ (1)

hvor ω = 2π/T er vinkelfrekvensen (2)

og T er periodetiden for den periodiske funktion f(t). (3)

Ligning (1) består altså af et bidrag a_0, som ikke varierer med tiden (et konstant bidrag) og af to uendelige rækker af bidrag, der varierer med tiden t som henholdsvis cosinus- og sinusfunktioner. Alle cosinus-bidragene skal multipliceres med de tidsuafhængige koefficienter a_n, som defineres nedenfor, mens alle sinus-bidragene skal multipliceres med de tidsuafhængige koefficienter b_n, som også defineres nedenfor. Medtager man kun et endeligt antal bidrag får man en tilnærmelse til f(t), som f.eks. de 21 bidrag i ovenstående figur 16.

Ved den ovenfor gennemgåede grafiske behandling af Fourier-rækkerne valgtes det digitale signal at være spejlsymmetrisk omkring midtpunktet (t = 0,00 µs) for den horisontale akse, som det fremgår af alle figurerne 3 og 6 – 16.

Generelt gælder, at hvis f(t) er spejlsymmetrisk omkring t = 0, kan Fourier-koefficienterne a_0, a_n og b_n udtrykkes ved nedenstående ligninger (4) - (6). Den matematiske udledning af disse ligninger er omfattende, så derfor opskrives de blot her. Der kan f.eks. henvises til [1] for de matematiske udredninger.

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)dt$ (4)

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega t)\, dt$ (5)

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega t)\, dt$ (6)

Det digitale signal vist ved figur 1 (med duty cycle = 50 %) er netop spejlsymmetrisk omkring t = 0,00 µs, og dets forløb f(t) kan beskrives som:

f(t) = 0,0 V i tidsintervallet – T/2 = – 0,50 µs ≤ t < – T/4 = – 0,25 µs.

f(t) = 5,0 V i tidsintervallet – T/4 = – 0,25 µs ≤ t < T/4 = 0,25 µs.

f(t) = 0,0 V i tidsintervallet T/4 = 0,25 µs ≤ t < T/2 = 0,50 µs.

I den følgende behandling vil en angivelse af den relevante duty cycle tilføjes Fourier-koefficienterne, således vil f.eks. $a_{0\text{-}50}$ indikere at koefficienten a_0 beregnes for duty cycle = 50 %.

For $a_{0\text{-}50}$ fås dermed:

$a_{0\text{-}50} = \frac{1}{1{,}0\ \mu s}$ (0,0 V · 0,25 µs + 5,0 V · 0,50 µs + 0,0 V · 0,25 µs) = ½ · 5,0 V = 2,5 V (7),

hvilket netop er middelværdien af det betragtede digitale signal, – helt generelt gælder, at a_0-koefficienten er middelværdien af det digitale signal.

Ovenstående integraludtryk, (6) og (5) for b_n og a_n, vurderes nemmest ved at foretage grafiske betragtninger i form af arealbetragtninger med fortegn.

Til det formål vil først funktionsforløbet for $f(t) \cdot \sin(n\omega t)$, og dernæst for $f(t) \cdot \cos(n\omega t)$ i intervallet

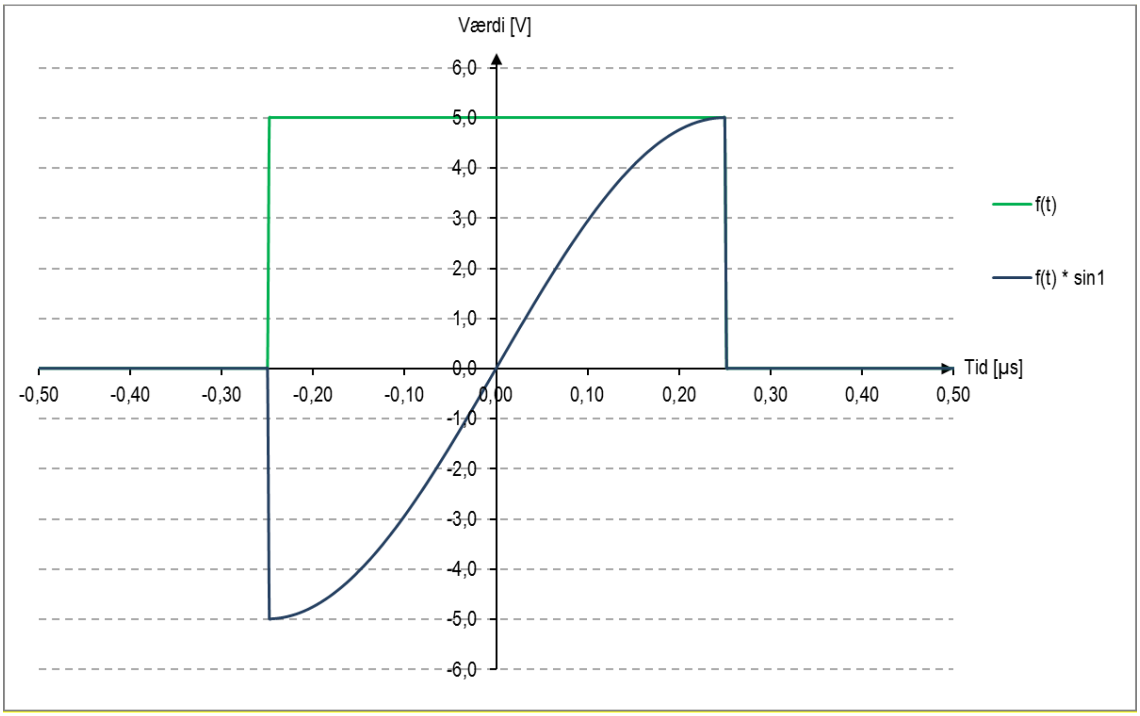
– T/2 = – 0,50 µs til T/2 = 0,50 µs og for n = 1, 2, 3, 4 og 5 blive vist i det følgende.

For $\sin(n\omega t)$ fås for det digitale signal

$$\sin(n\omega t) = \sin(n \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}) \qquad (8),$$

idet ω og T = 1,0 µs er definerede ved (2) og (3).

Til bestemmelse af $b_{1\text{-}50}$ betragtes figur 17.

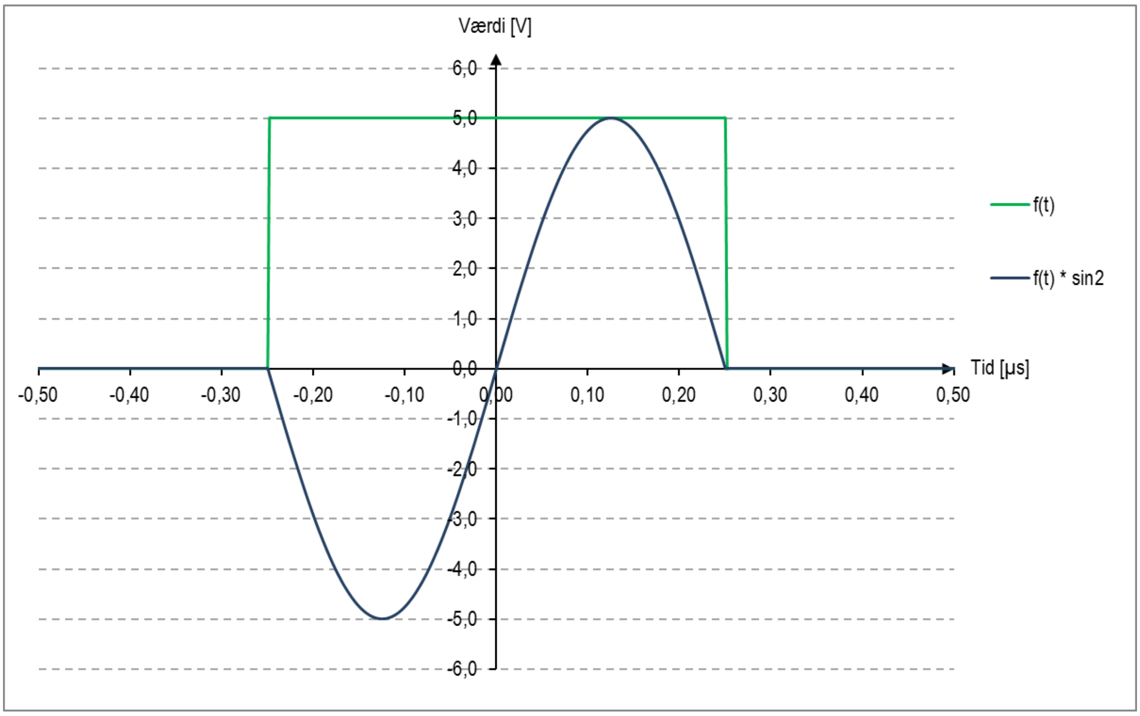


Figur 17. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin1 = f(t) · $sin(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

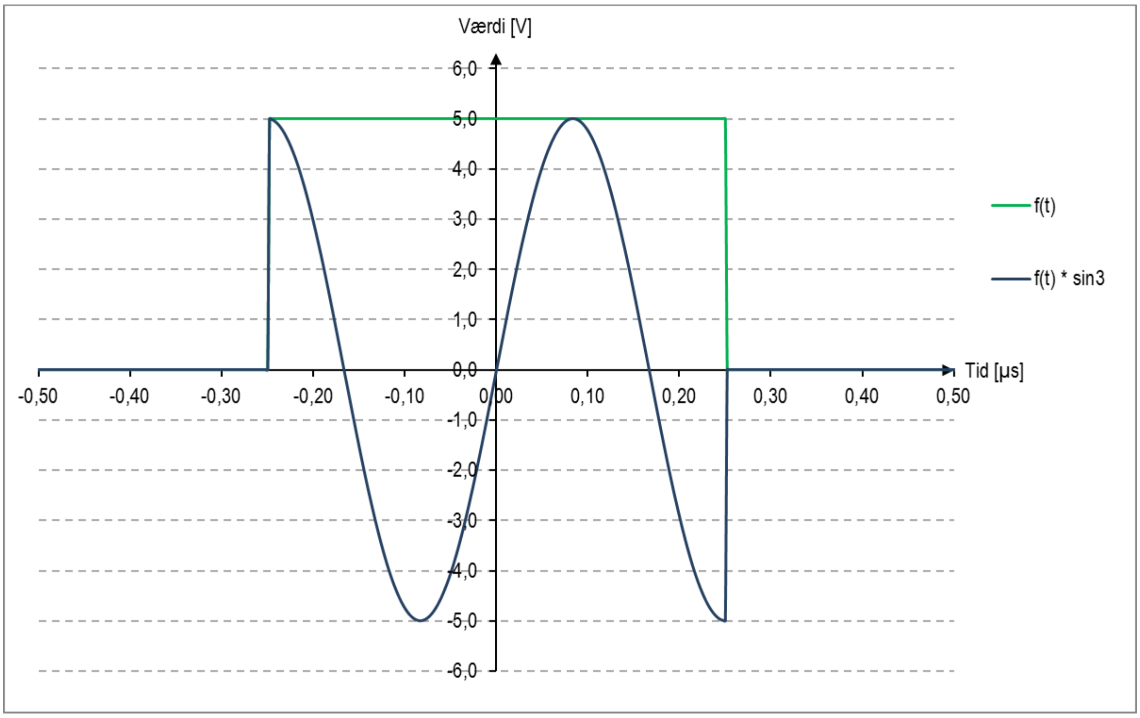
$b_{1\text{-}50}$ er nettoarealet (arealet regnet med fortegn) mellem kurven for f(t) · sin1 og den horisontale akse. Fra figur 17 ses dette nettoareal bliver 0, og dermed er

$$b_{1\text{-}50} = 0 \qquad (9).$$

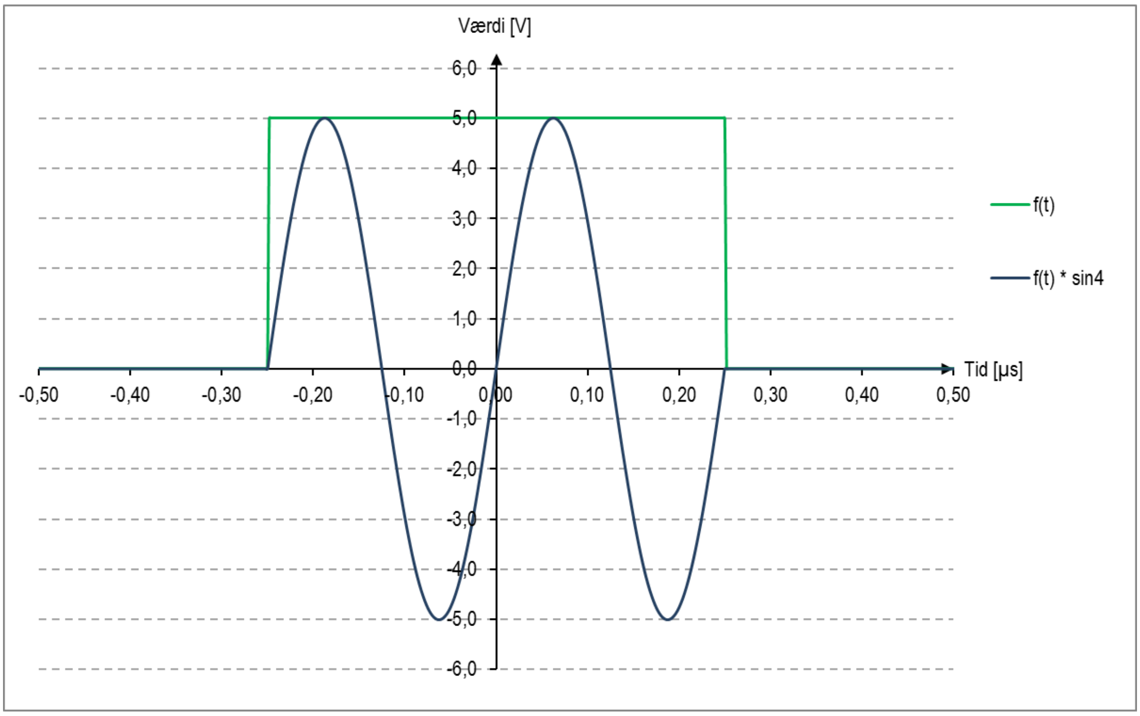
Til bestemmelse af $b_{2\text{-}50}$ til $b_{5\text{-}50}$ betragtes følgende figurer 18 – 21, og igen betragtes nettoarealerne.



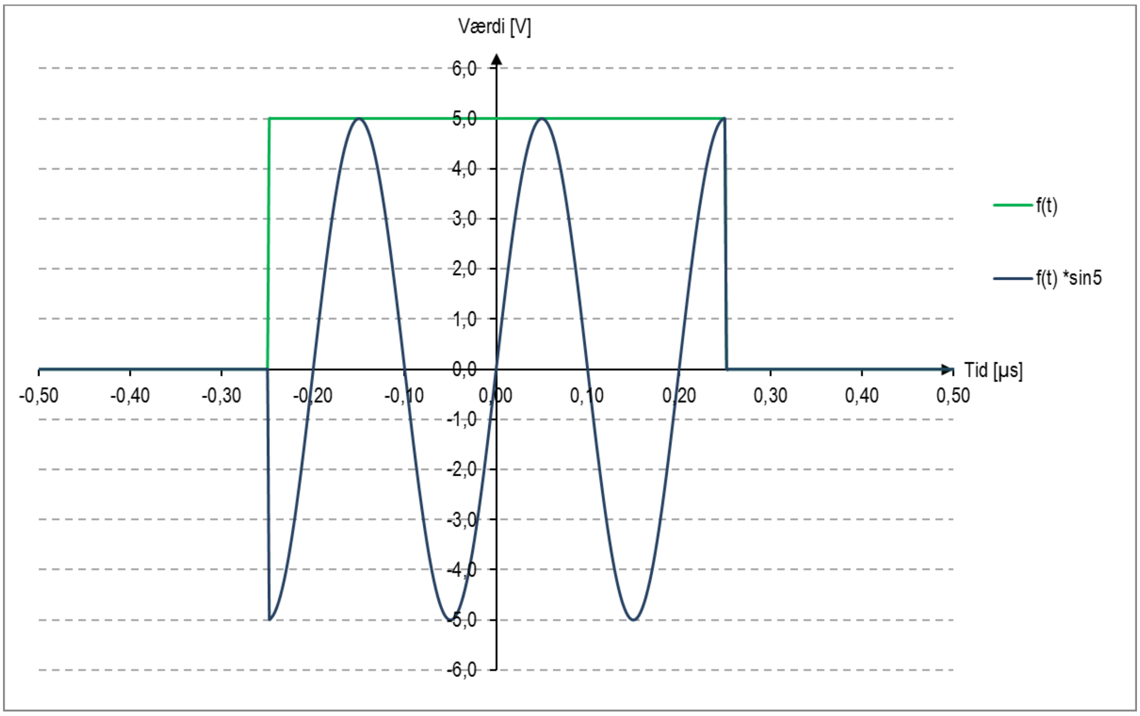
Figur 18. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin2 = $f(t) \cdot sin(2 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



Figur 19. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin3 = $f(t) \cdot sin(3 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



Figur 20. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin4 = $f(t) \cdot sin(4 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

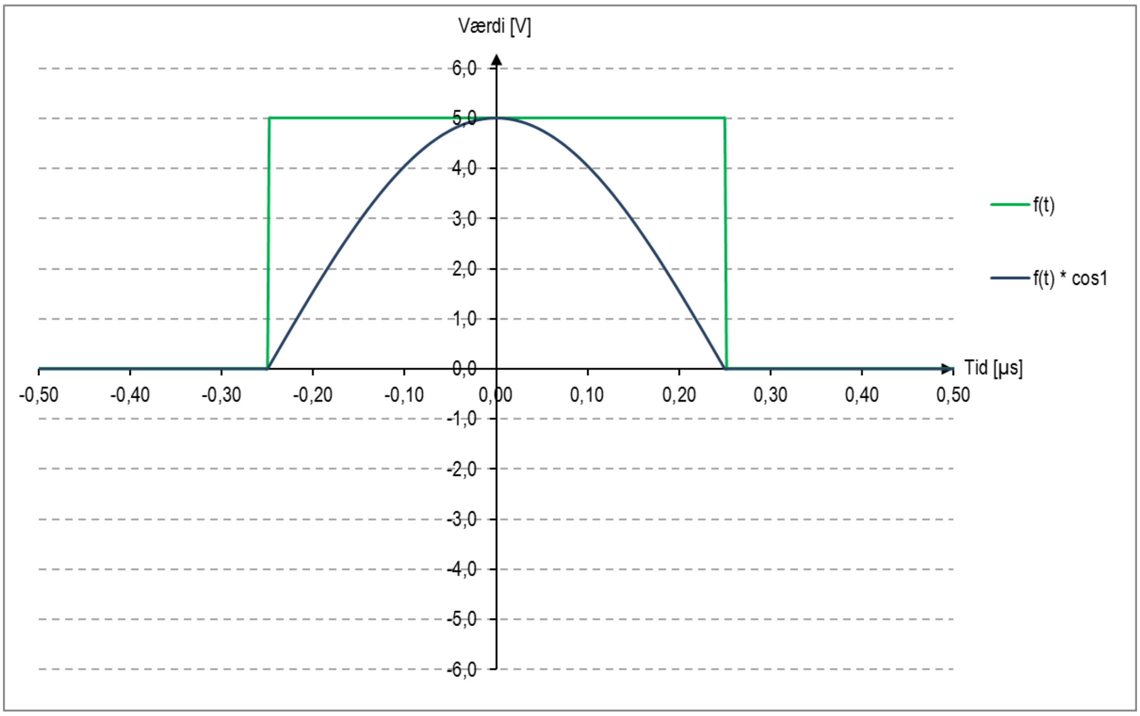


Figur 21. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin5 = $f(t) \cdot sin(5 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

Det indses, at alle nettoarealer bliver 0. Dette vil gælde for alle værdier af n, og dermed fås

$b_{n-50} = 0$, n = 1, 2, 3, ….. (10)

En tilsvarende fremgangsmåde anvendes til bestemmelse af a_{n-50}.



Figur 22. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos1 = f(t) · $cos(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

Værdien af $a_{1\text{-}50}$ er nettoarealet mellem kurven for f(t) · cos1 og den horisontale akse. Her må der foretages en integralberegning.

Integralsammenhængen

$$\int \cos \omega t \, dt = \frac{\sin \omega t}{\omega} \qquad (11)$$

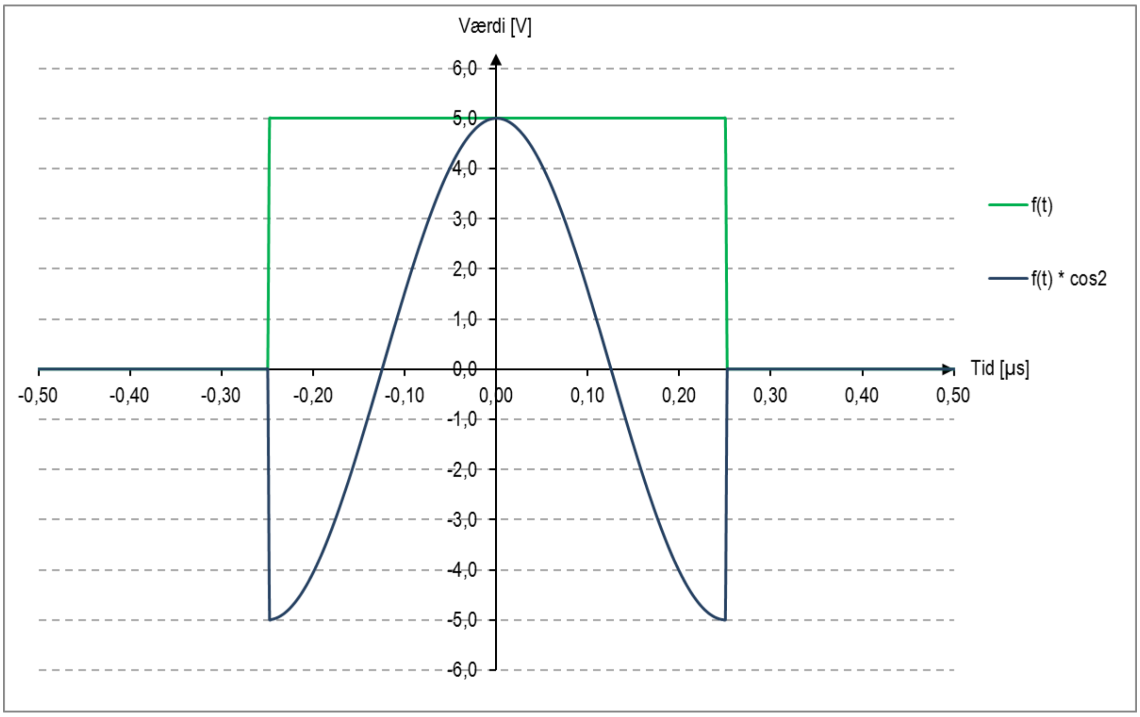
anvendes sammen med (5) i følgende beregning.

$$a_{1\text{-}50} = \frac{2}{1{,}0\ \mu s} \int_{-0{,}25\ \mu s}^{0{,}25\ \mu s} 5{,}0\ V \cdot \cos(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})\, dt = 5{,}0\ V \cdot \frac{2}{1{,}0\ \mu s} \left[\frac{1{,}0\ \mu s}{2\pi} \cdot \sin(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})\right]_{-0{,}25\ \mu s}^{0{,}25\ \mu s}$$

$$= \frac{5{,}0\ V}{\pi} \cdot [\sin(2\pi \cdot \frac{0{,}25\ \mu s}{1{,}0\ \mu s}) - \sin(2\pi \cdot \frac{-0{,}25\ \mu s}{1{,}0\ \mu s})] = \frac{5{,}0\ V}{\pi} \cdot [1-(-1)] = \frac{2 \cdot 5{,}0\ V}{\pi} = 3{,}2\ V \qquad (12)$$

$a_{1\text{-}50}$ = 3,2 V er amplitudeværdien af den 1. harmoniske. Denne værdi bevirker, som man også ser for figur 6, at den 1. harmoniske har et niveau større end det digitale signal f.eks. for t = 0,00 µs, og har lavere niveau f.eks. for t = – 0,50 µs og for t = 0,50 µs.

Til bestemmelse af $a_{2\text{-}50}$ betragtes figur 23.

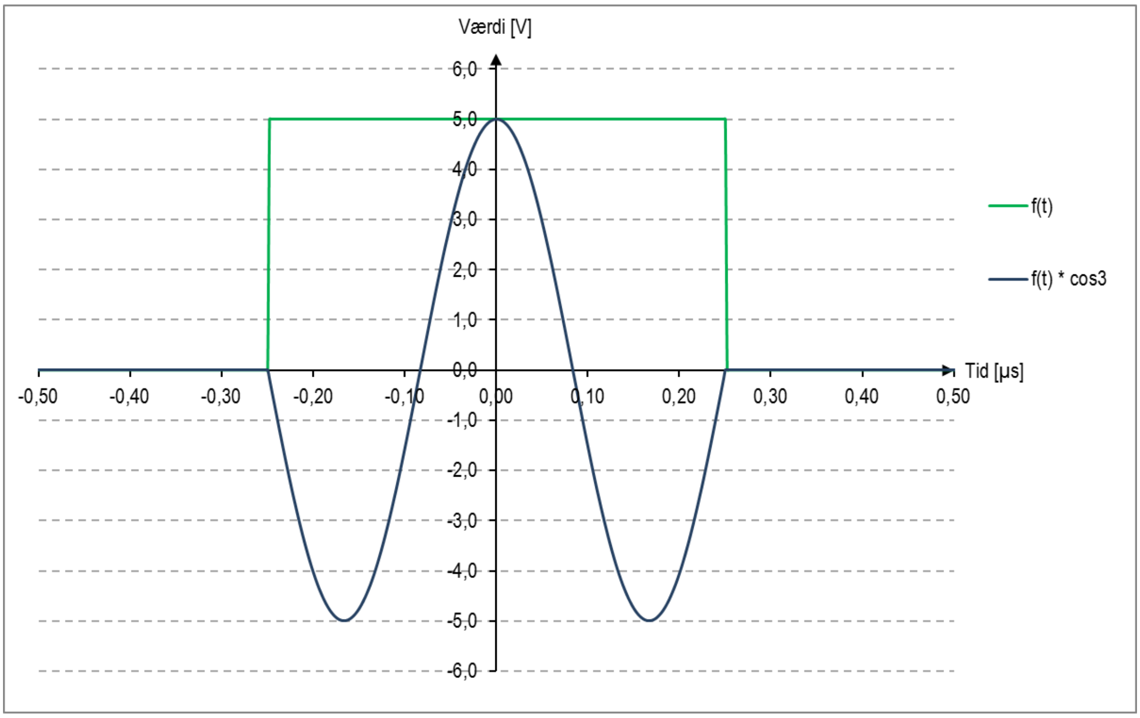


Figur 23. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos2 = $f(t) \cdot cos\left(2 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}\right)$

I lighed med de tidligere nettoarealbetragtninger indses, da nettoarealet for figur 23 er 0, at

$a_{2\text{-}50} = 0$ (13)

Til bestemmelse af a_3 betragtes figur 24.

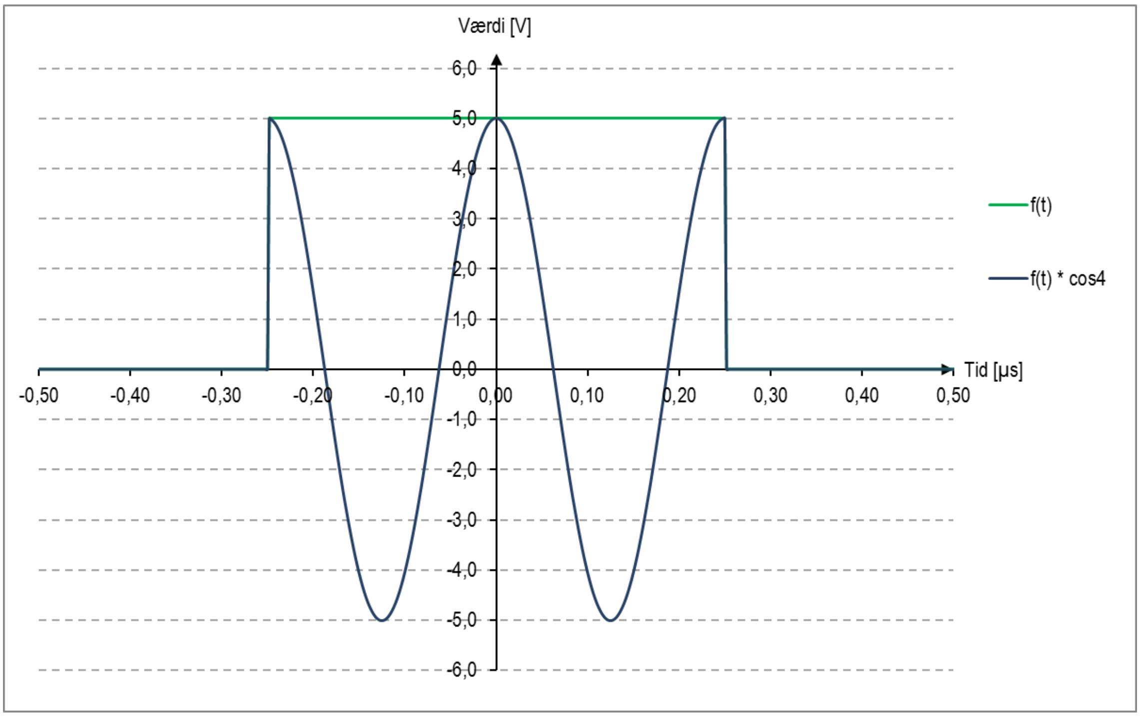


Figur 24. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos3 = $f(t) \cdot cos\left(3 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}\right)$

Ved figur 22, hvor n = 1, er der tale om et halvt cosinus forløb. Her, i figur 24, er der tale om tre mindre halve cosinusforløb. Det indses, at hvert af disse mindre arealer er 1/3 af arealet fra figur 22, idet kurveformen og amplituden på 5,0 V er den samme, men den tidsmæssige udstrækning er 1/3 · 1,0 µs. Nettoarealet, som er lig med $a_{3\text{-}50}$, bliver negativt, og dermed

$$a_{3\text{-}50} = -\,1/3 \cdot a_1 = -\frac{2 \cdot 5{,}0\ \text{V}}{3 \cdot \pi} = -\,1{,}0\ \text{V} \qquad (14)$$

Til bestemmelse af $a_{4\text{-}50}$ betragtes figur 25.

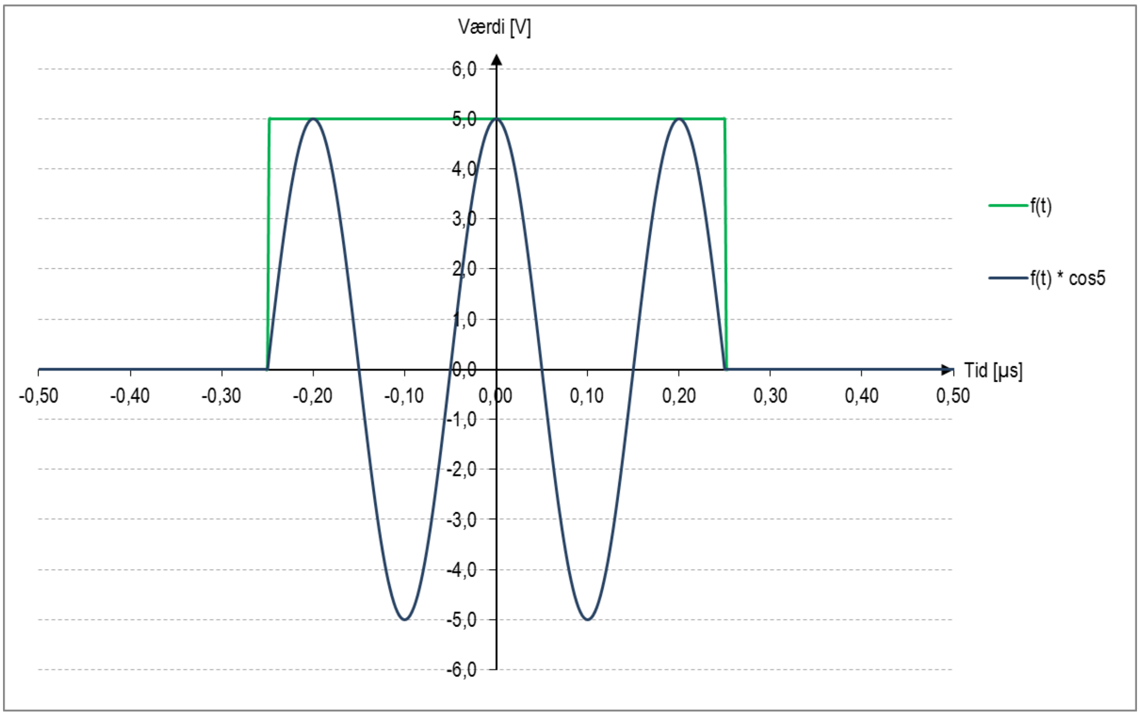


Figur 25. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos4 = $f(t) \cdot cos(4 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

I lighed med de tidligere nettoarealbetragtninger indses, da nettoarealet for figur 25 er 0, at

$$a_{4\text{-}50} = 0 \qquad (15)$$

Sluttelig, til bestemmelse af $a_{5\text{-}50}$ betragtes figur 26.



Figur 26. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos5 = f(t) · $cos(5 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

I lighed med de foregående betragtninger indses, at der her på figur 26 er tale om 5 halve cosinusforløb, hvis areal hver er 1/5 af arealet fra figur 22, og at nettoarealet, som er lig med a_5, bliver positivt. Hermed fås

$$a_{5\text{-}50} = 1/5 \cdot a_1 = \frac{2 \cdot 5{,}0\ V}{5 \cdot \pi} = 0{,}64\ V \qquad (16)$$

Ved at videreføre de foregående grafiske overvejelser kan a_n for større n-værdier end 5 findes. I tabel 1 er $a_{n\text{-}50}$-værdierne op til og med n = 31 opskrevet for de værdier, som er forskellige fra 0.

n	a_{n50} [V]
1	3,2
3	- 1,1
5	0,64
7	- 0,45
9	0,35
11	- 0,29
13	0,24
15	- 0,21

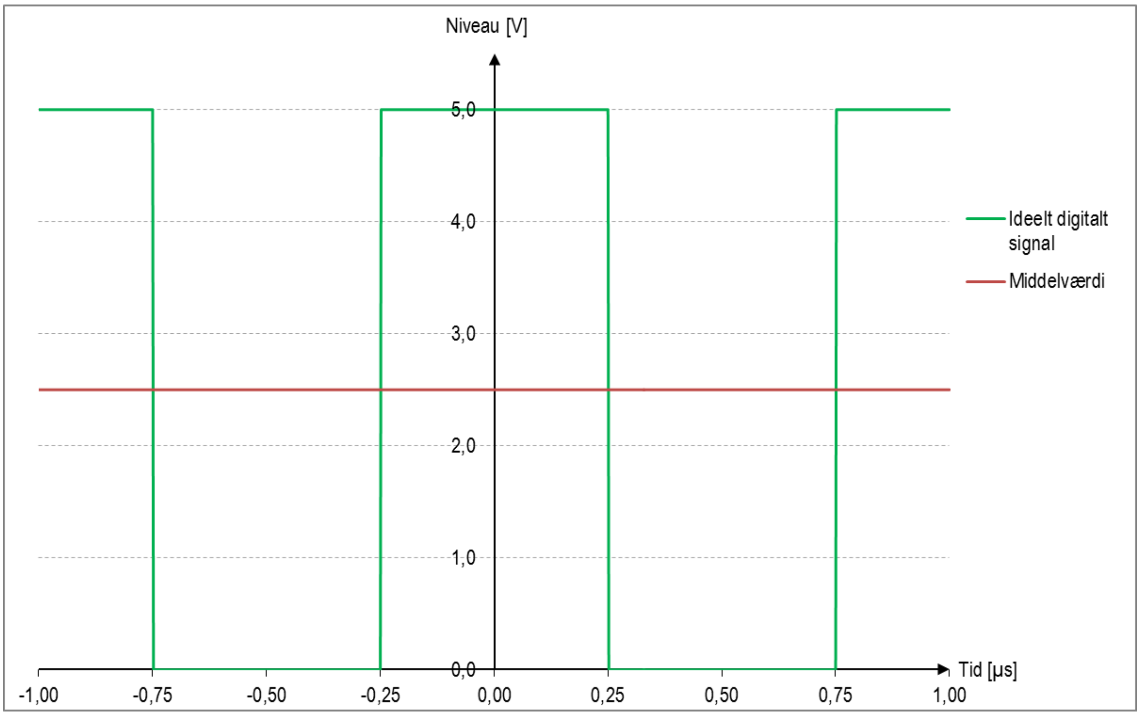
n	a_{n50} [V]
17	0,19
19	- 0,17
21	0,15
23	- 0,14
25	0,13
27	- 0,12
29	0,11
31	- 0,10

Tabel 1. $a_{n\text{-}50}$-værdier forskellige fra 0 for det ideelle digitale signal fra figur 3. n op til og med 31 er vist.

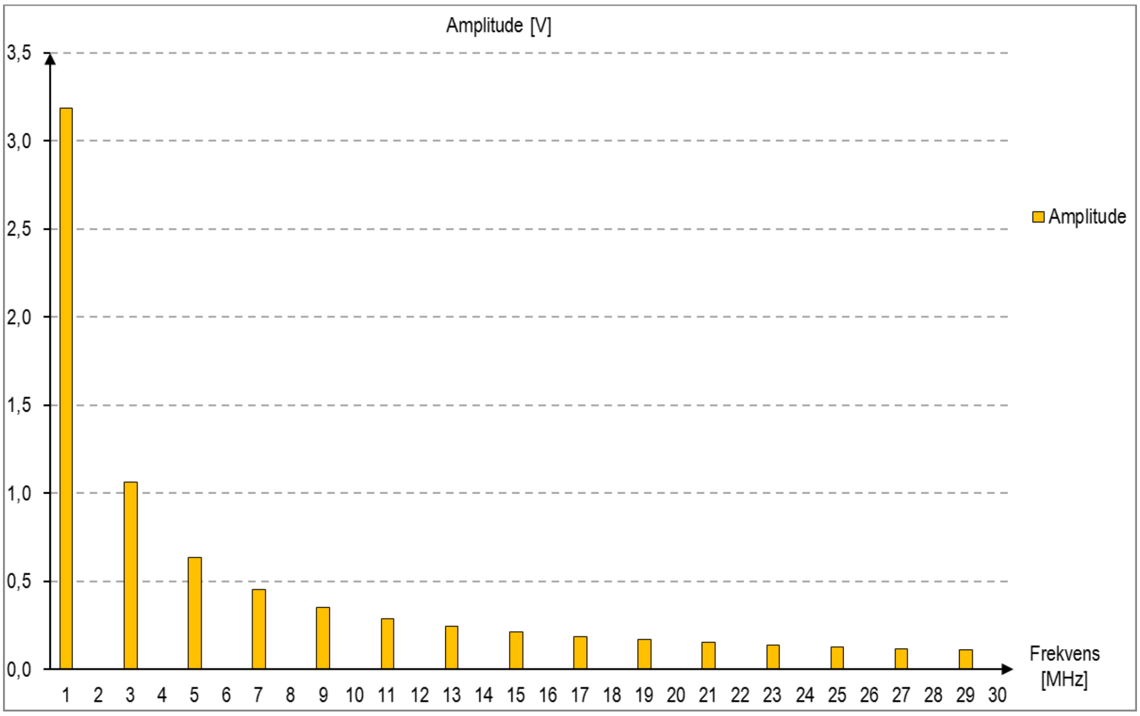
Værdierne for n = 1, 3 og 5 er netop de værdier, som valgtes for amplituderne af de harmoniske for henholdsvis figurerne 6, 9 og 13. Værdierne for amplituderne for de indsatte lige harmoniske valgtes som rimelige størrelser i forhold til de nærmeste ulige harmoniske.

Som tidligere omtalt svarer n = 1 til 1. harmoniske f_1 = 1,00 MHz, n = 3 svarer til 3. harmoniske f_3 = 3,00 MHz, osv. Amplitudeværdierne er de absolutte værdier af de tilsvarende $a_{n\text{-}50}$-værdier.

Hermed kan man vise hvorledes signalet fra figur 3 ser ud i frekvensdomænet. Dette er vist på figur 28, for frekvenser op til 30 MHz. For sammenligningens skyld er figur 3 gentaget ved figur 27, således at man umiddelbart kan sammenholde billederne af tidsdomænet og frekvensdomænet af det samme ideelle digitale signal.



Figur 27. Digitalt signal i tidsdomænerepræsentation.

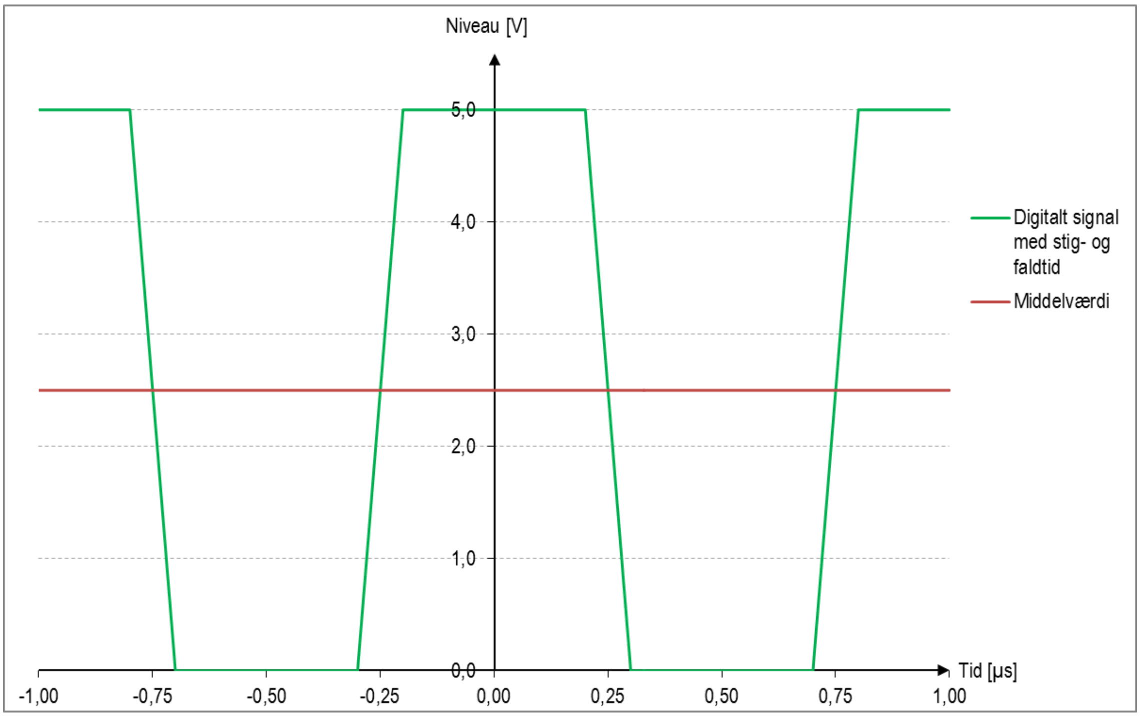


Figur 28. Tilsvarende frekvensdomænerepræsentationen for signalet ved figur 27, vist for frekvenser op til 30 MHz.

Det digitale signal i figur 27 er et ideelt digitalt signal, hvor $t_f = T_f = t_r = T_r = 0$ (der skiftes momentant fra høj tilstand (5,0 V) til lav tilstand (0,0 V) og omvendt).

7 Fourier-koefficienterne a_n for digitalt signal karakteriseret ved t_h og samme værdier for T_r og T_f

Et stadig forenklet, men dog mere realistisk signal som udviser både stig- og faldtider er vist ved figur 29. Stigtiden T_r og faldtiden T_f er ens og lig med 0,10 µs.



Figur 29. Tidsdomænerepræsentation af digitalt spændingssignal med ens fald - og stigtider $T_f = T_r = 0{,}10$ µs. Som for figur 27 er spændingsintervallet A = 5,0 V og periodetiden T = 1,0 µs.

For et digitalt signal karakteriseret ved t_h og $T_r = T_f$ gælder for a_n – værdierne

$$a_n = \frac{2 \cdot A \cdot t_h}{T} \cdot \frac{\sin x_h}{x_h} \cdot \frac{\sin x_r}{x_r} \qquad (17),$$

hvor t_h og A er definerede henholdsvis på siderne 3 og 5.

x_h og x_r i (17) er definerede ved

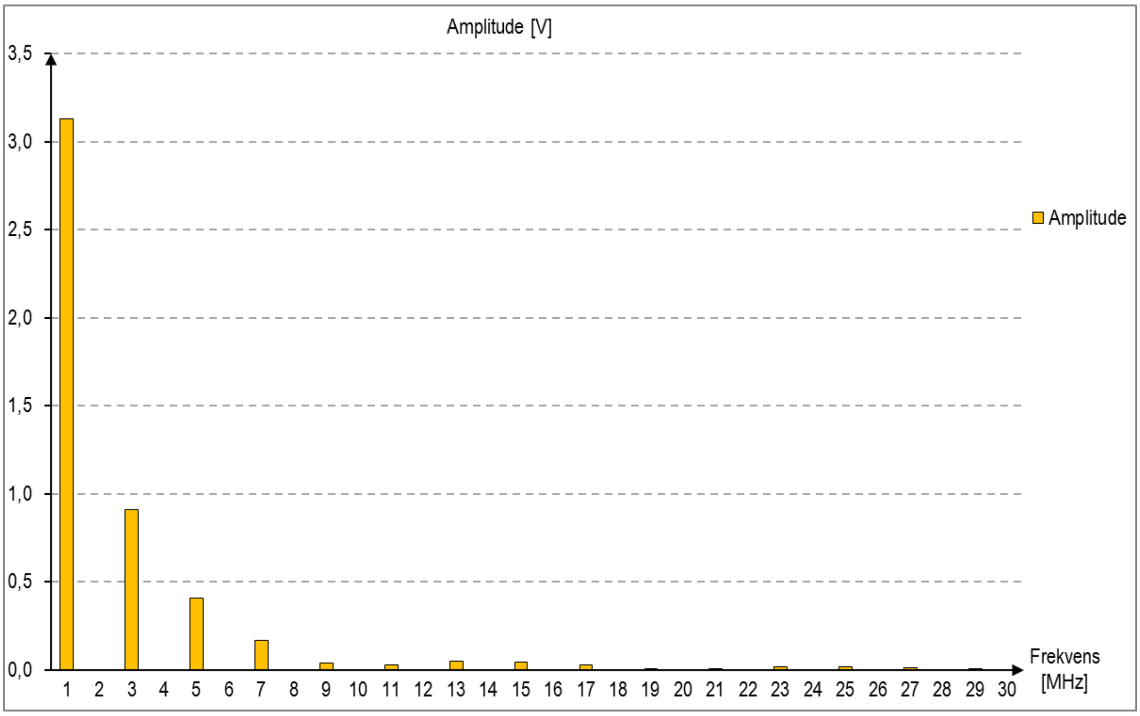
$$x_h = \frac{n \cdot \pi \cdot T_h}{T} \qquad (18)$$

$$x_r = \frac{n \cdot \pi \cdot T_r}{T} \qquad (19),$$

hvor T_h og T_r er defineret på side 3.

For baggrund og udledning af disse udtryk henvises til [3] og [4].

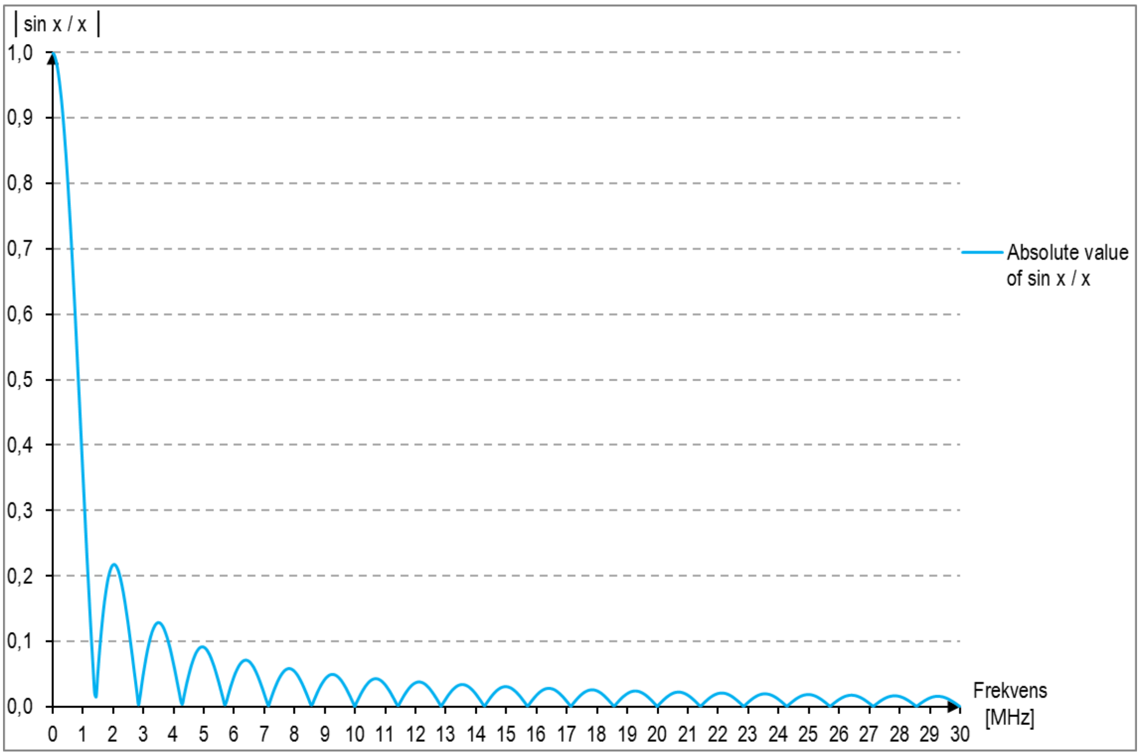
Den til figur 29 tilsvarende frekvensdomænerepræsentation er vist på figur 30, hvor amplitudeværdierne er beregnede ved brug af (17), (18) og (19).



Figur 30. Tilsvarende frekvensdomænerepræsentationen for signalet ved figur 29, vist for frekvenser op til 30 MHz.

Ved sammenligning af figur 30 med figur 28 kan man bemærke følgende

1. Amplituden af 1. harmoniske er nærmest det samme, ca. 3,2 V, for figur 28 og figur 30.
2. Amplituderne af 3. harmoniske og højere er lavere for figur 30 end for figur 28. For de højere harmoniske (fra 7. og opad) er amplituderne betydeligt lavere. Dette er en følge af de endelige værdier af $T_f = T_r$ = 0,10 µs for figur 29 i modsætning til værdierne $T_f = T_r$ = 0,0 µs gældende for figur 27.
3. Man bemærker lige netop at amplitudeniveauerne har en stigning for de 13. og 15. harmoniske. Dette skyldes funktionsudtrykket $\frac{\sin x_r}{x_r}$ i (17). Den absolutte værdi af $\frac{\sin x}{x}$ – funktionen har det karakteristiske forløb som vist ved figur 31.



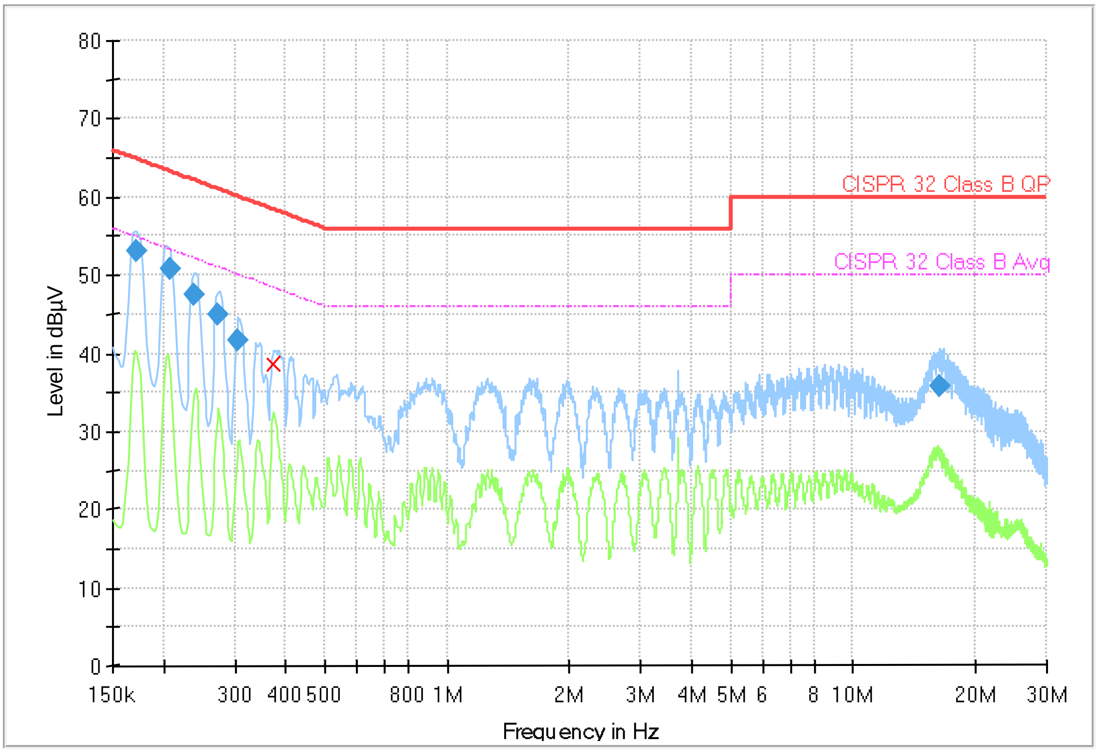
Figur 31. Det karakteristiske forløb af den absolutte værdi af $\frac{\sin x}{x}$ *– funktionen.*

8 Reelle digitale signaler

I de foregående eksempler har værdierne af både T og t_h været konstante, T = 1,00 µs og t_h = 0,50 µs.

Dette er som oftest ikke tilfældet for virkemåden af en SMPS, idet både T og t_h kan variere. Disse variationer bevirker en tydelig ændring af billedet af frekvensdomænerepræsentationen.

Som et praktisk forekommende eksempel viser figur 32 måleresultatet fra emissionen fra en Switch Mode Power Supply (SMPS) ud på lysnettilslutningen.



Figur 32. Måleresultatet for en SMPS af emissionen ud på lysnettet i frekvensområdet 150 kHz til 30 MHz.

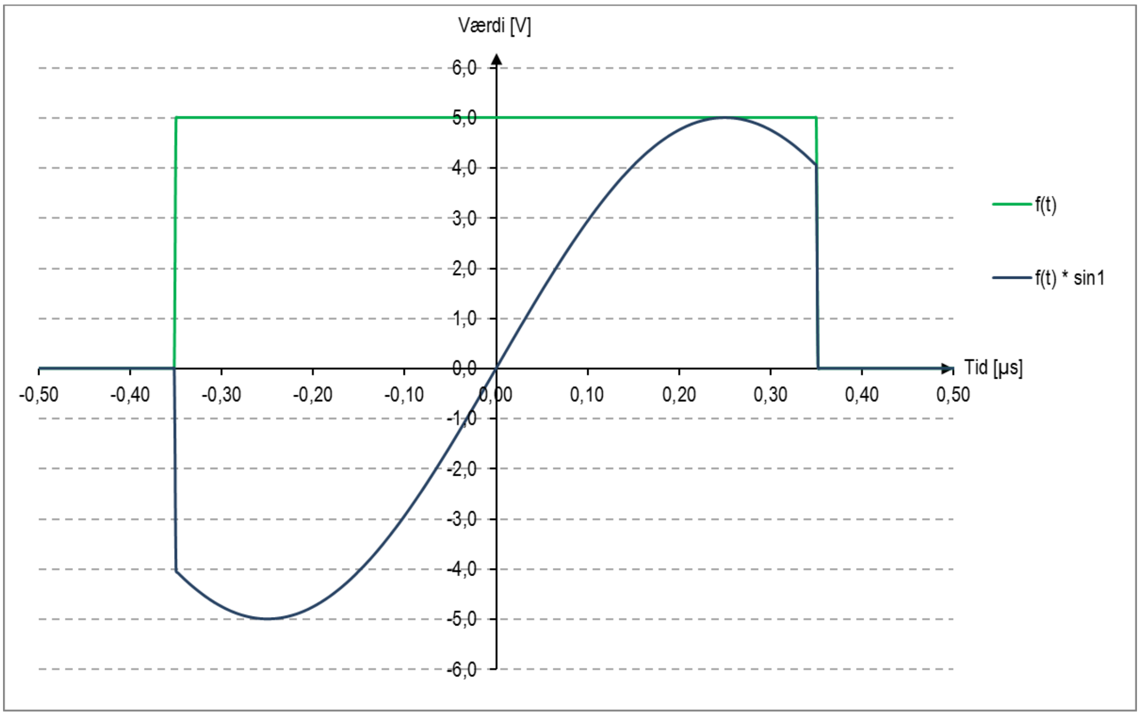
De blå rhomber og det røde kryds markerer udvælgelser af nogle måletekniske detaljer i forbindelse med den lovgivningsmæssige begrænsning af emissionen ud på lysnettet af elektromagnetisk støj. SMPS'en passerer testen med god margin, da den øverste røde kurve er grænseværdien for den blå målekurve, og den stiplede røde er grænseværdien for den grønne målekurve.

For SMPS'ens digitale oscillatorfrekvens gælder, at den er sat op til at variere/modulere over frekvensområdet ca. 650 kHz til ca. 750 kHz. Oscillatorens arbejdsprincip bevirker, at dette frekvensområde ikke optræder specielt markant på målebladet figur 32, og at der optræder mange andre frekvenser. Det gælder bl.a. de frekvenser man bemærker under ca. 400 kHz, - disse opstår som følge af oscillatorens modulationsfrekvens. Hvis oscillatoren var udformet til at afgive en fast frekvens, ville denne og de tilhørende harmoniske (i lighed med figur 28 og 32) optræde med betydelig styrke, som måske kunne overstige grænseværdien. Dette princip med at variere den digitale oscillatorfrekvens benævnes "spread spectrum". Princippet "udsmører" således styrken af de anvendte frekvenser over måleområdet. Man opnår dermed, at det bliver nemmere at overholde grænseværdierne. Over ca. 750 kHz bemærkes det karakteristiske forløb af den absolutte værdi af $\frac{\sin x}{x}$ – funktionen.

9 Ideelt digitalt signal med duty cycle forskellig fra 50 %

I det følgende betragtes et ideelt digitalt signal, for hvilket det er valgt at dc = 70 %.

I lighed med den foregående behandling betragtes figur 33 til bestemmelse af $b_{1\text{-}70}$.

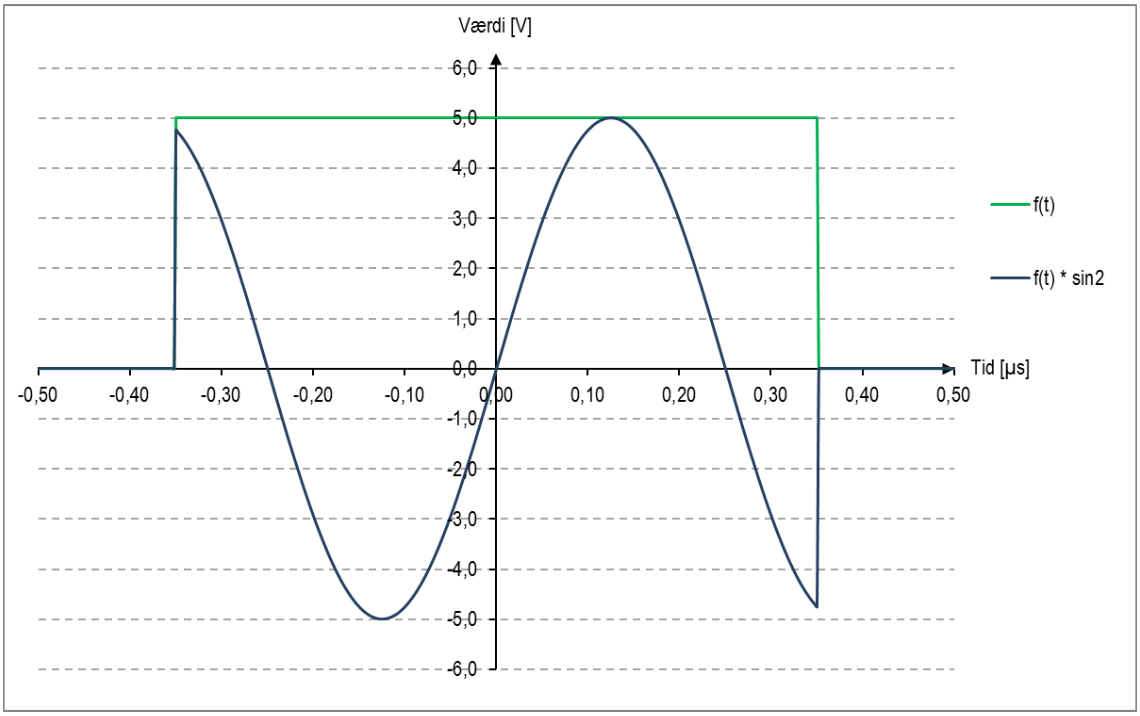


Figur 33. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin1 = f(t) · $sin\left(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}\right)$

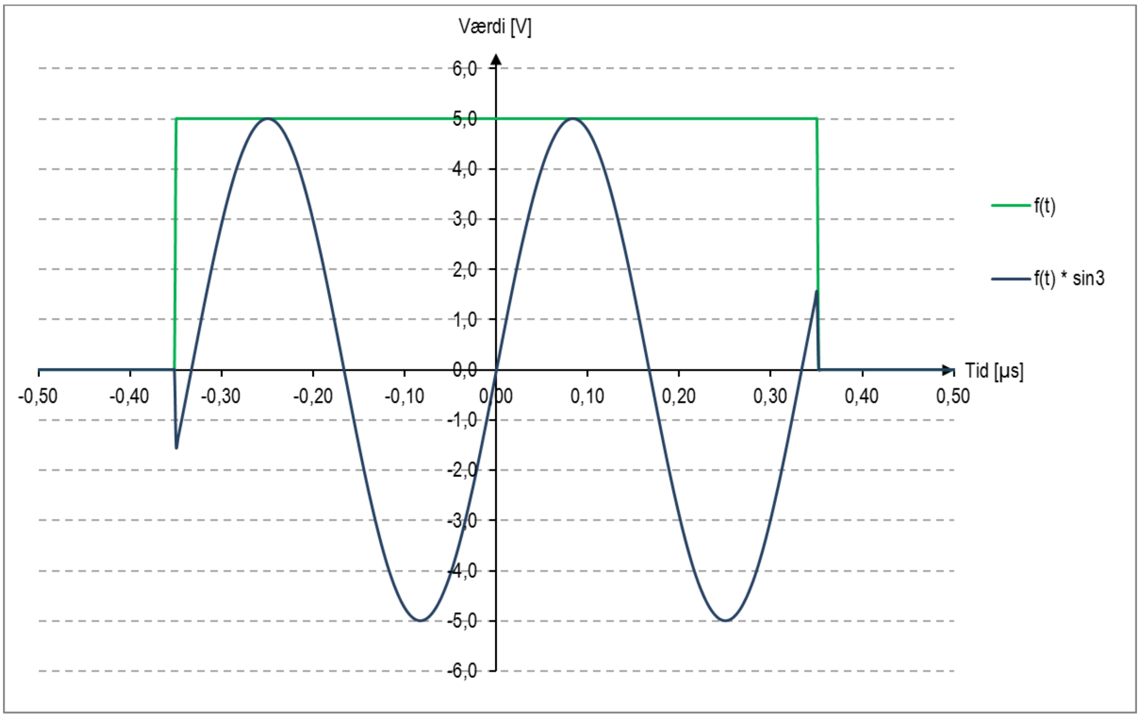
Som før er b_{170} lig med nettoarealet (arealet regnet med fortegn) mellem kurven for f(t) · sin1 og den horisontale akse. Fra figur 33 ses dette nettoareal bliver 0, og dermed er

$b_{1\text{-}70} = 0$ (20).

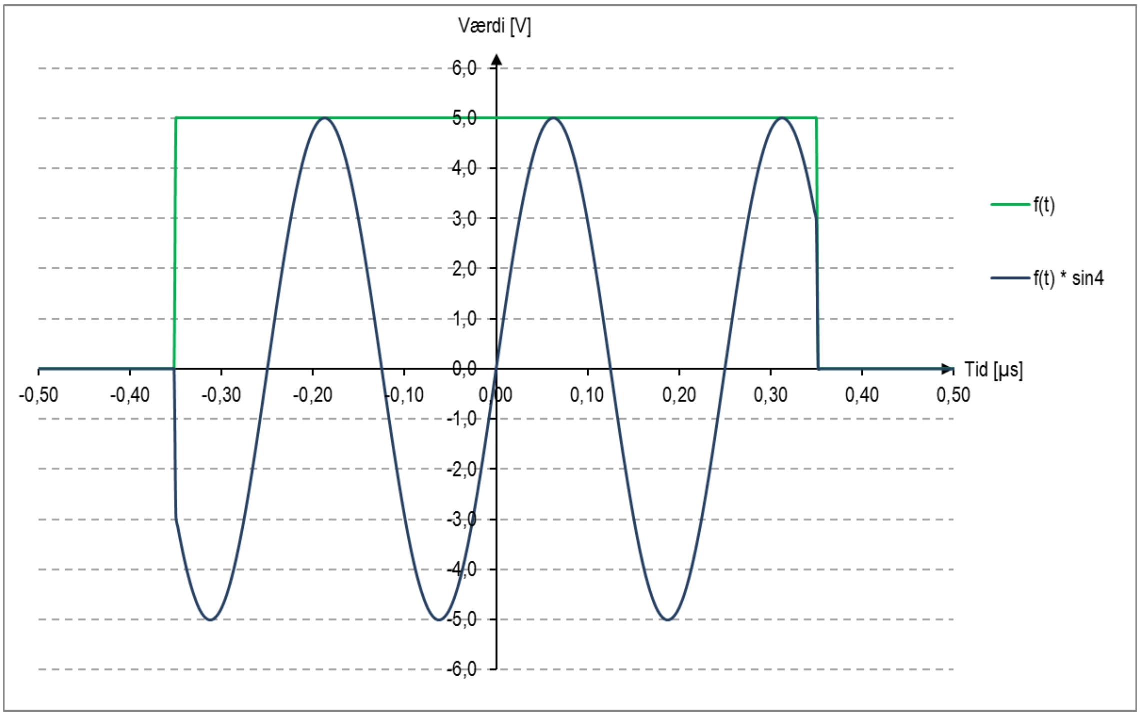
Til bestemmelse af $b_{2\text{-}70}$ til $b_{5\text{-}70}$ betragtes følgende figurer 34 – 37, og igen betragtes nettoarealerne.



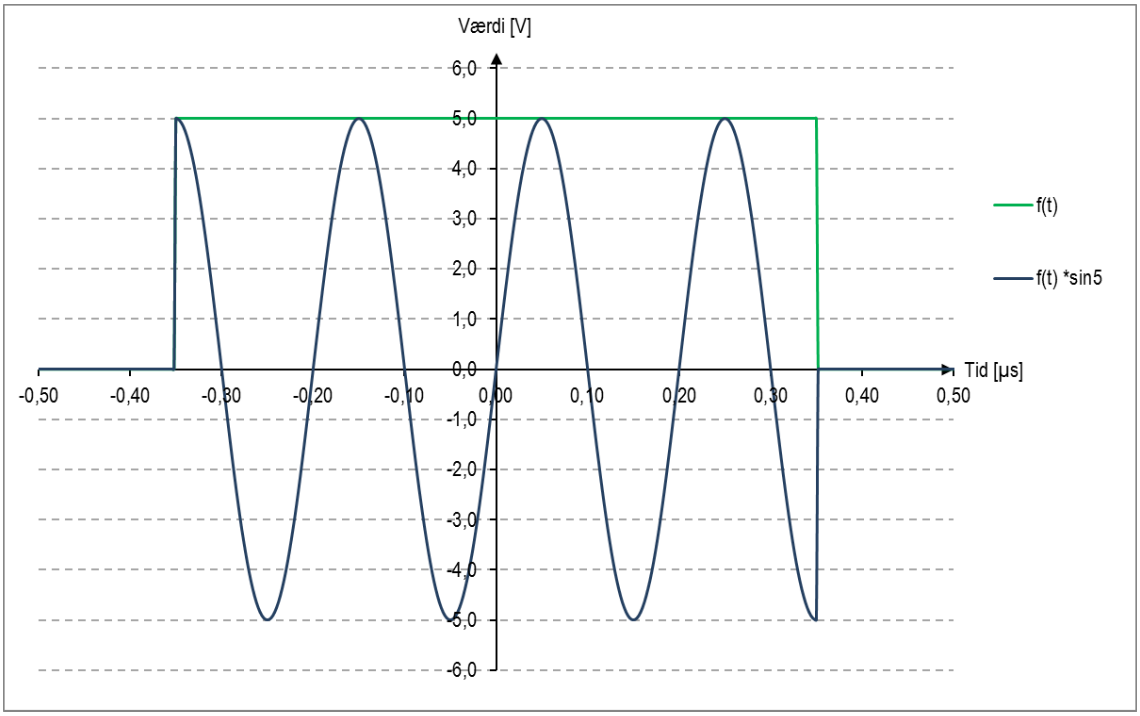
Figur 34. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin2 = $f(t) \cdot sin(2 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



Figur 35. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin3 = $f(t) \cdot sin(3 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



Figur 36. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin4 = f(t) · $sin(4 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



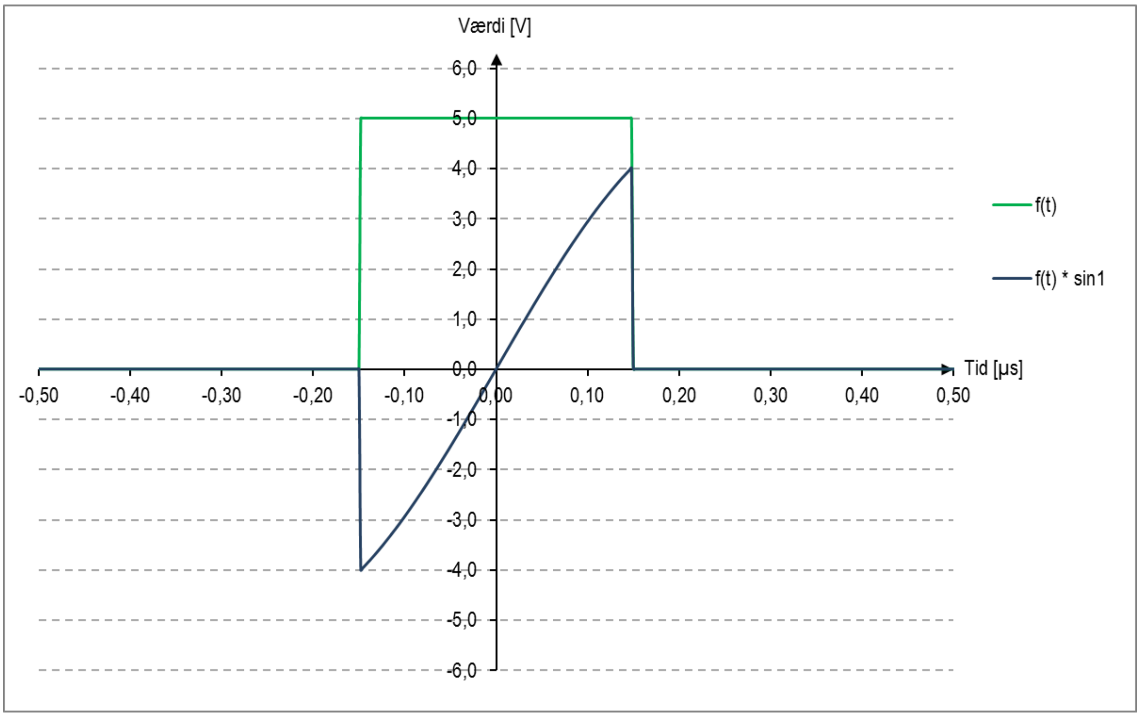
Figur 37. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin5 = f(t) · $sin(5 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

Som for dc = 50 % indses, at alle nettoarealer for dc = 70 % også bliver 0. Dette vil gælde for alle værdier af n, og dermed fås

$b_{n\text{-}70} = 0$, n = 1, 2, 3, ….. (21).

Inden $a_{n\text{-}70}$-koefficienterne evalueres gennemføres en tilsvarende betragtningsmåde til evaluering af $b_{n\text{-}30}$-koefficienterne for et digitalt signal med dc = 30 %. Et signal med denne dc kan betragtes som det komplementære signal til signalet med dc = 70 %.

Figur 38 betragtes til bestemmelse af $b_{1\text{-}30}$.

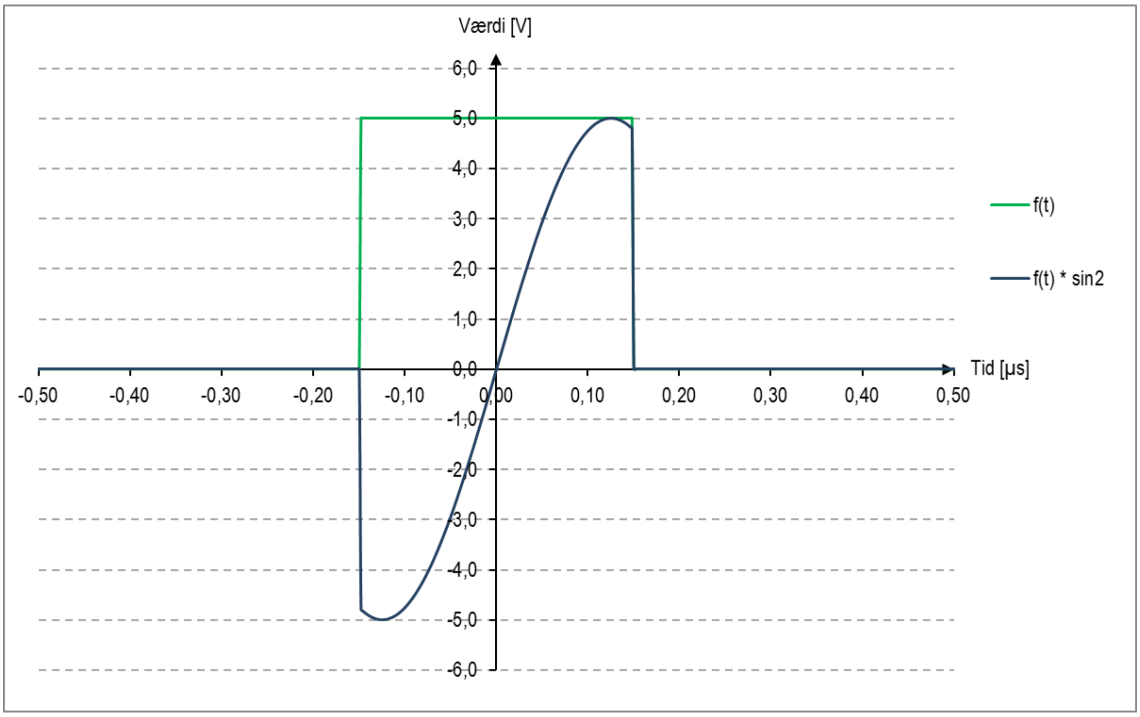


Figur 38. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin1 = f(t) · $sin(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

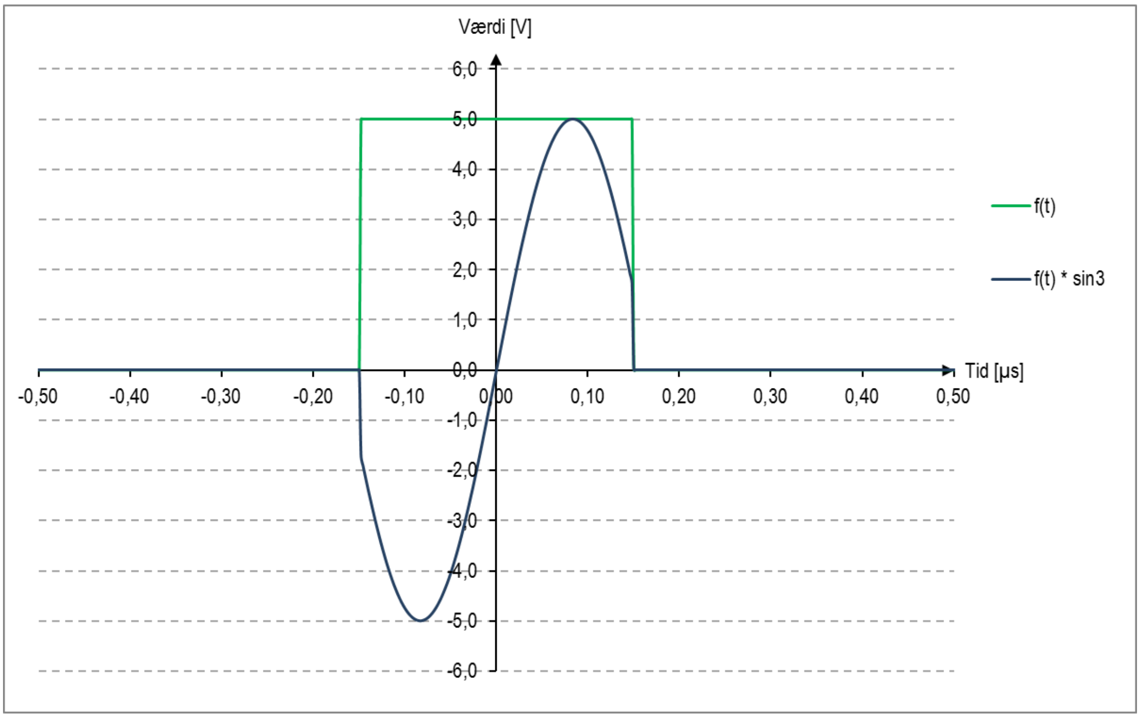
Som før er $b_{1\text{-}30}$ lig med nettoarealet (arealet regnet med fortegn) mellem kurven for f(t) · sin1 og den horisontale akse. Fra figur 38 ses dette nettoareal bliver 0, og dermed er

$b_{1\text{-}30} = 0$ (22).

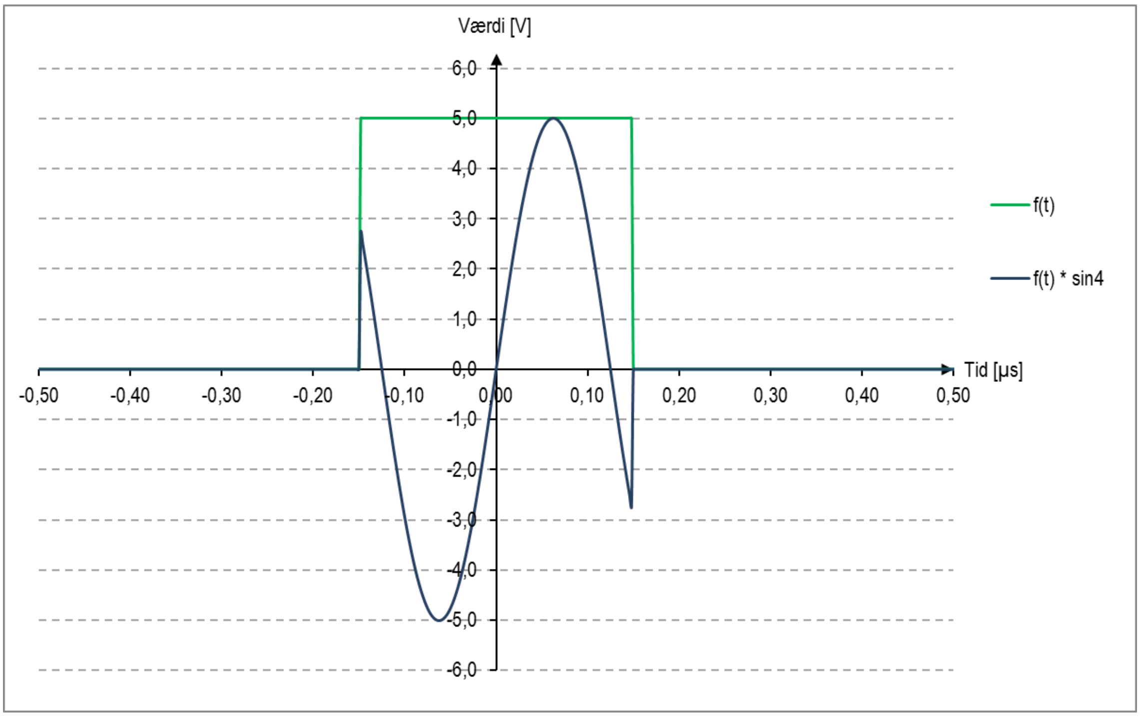
Til bestemmelse af $b_{2\text{-}70}$ til $b_{5\text{-}70}$ betragtes følgende figurer 39 – 42, og igen betragtes nettoarealerne.



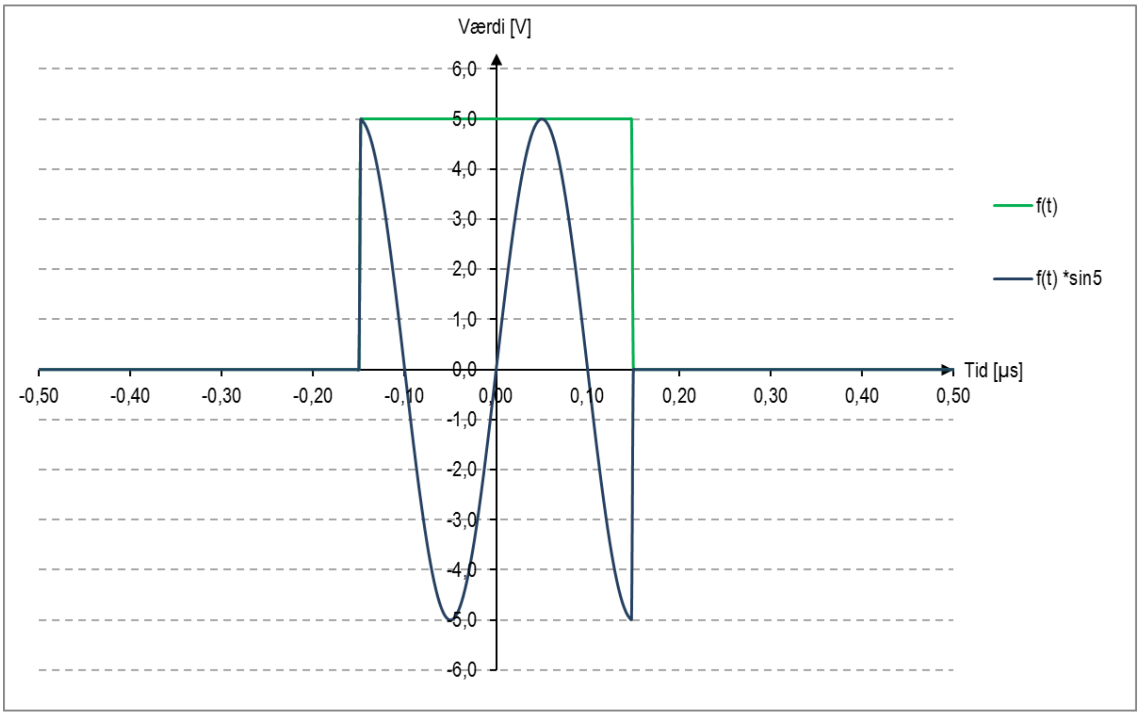
Figur 39. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin2 = f(t) · $sin(2 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



Figur 40. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin3 = f(t) · $sin(3 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



Figur 41. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin4 = f(t) · $sin(4 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

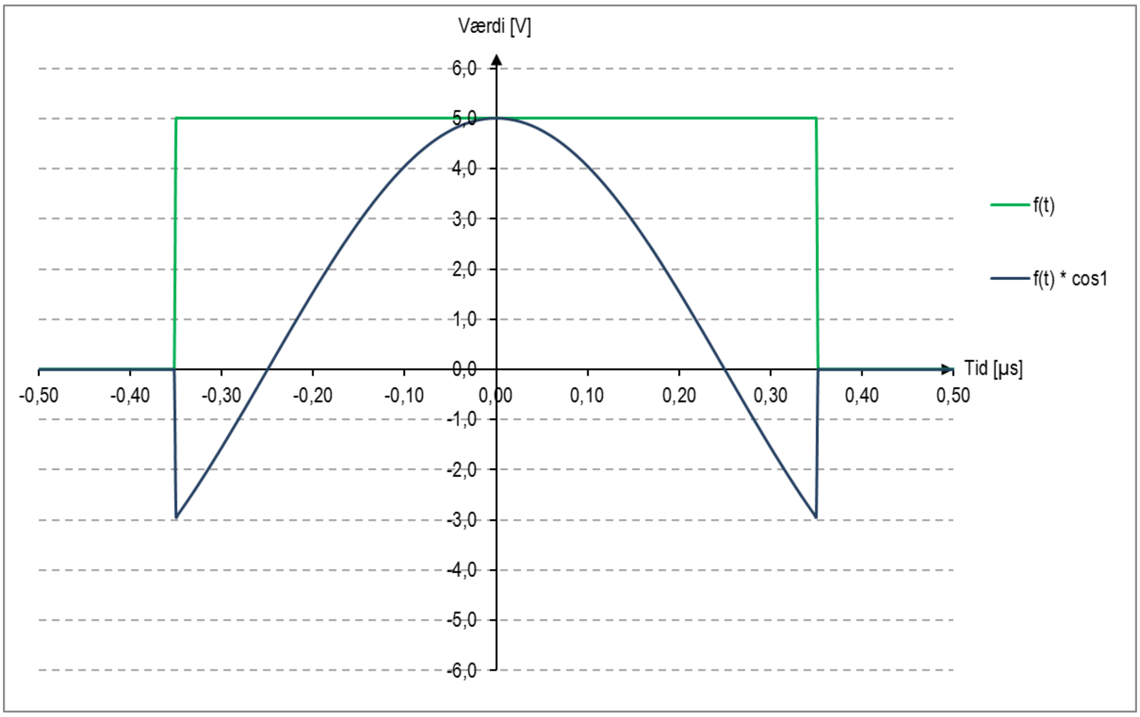


Figur 42. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · sin5 = $f(t) \cdot sin(5 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

Ikke helt overraskende indses, at alle nettoarealer for dc = 30 % også bliver 0 som for dc = 70 %. Dette vil gælde for alle værdier af n, og dermed fås

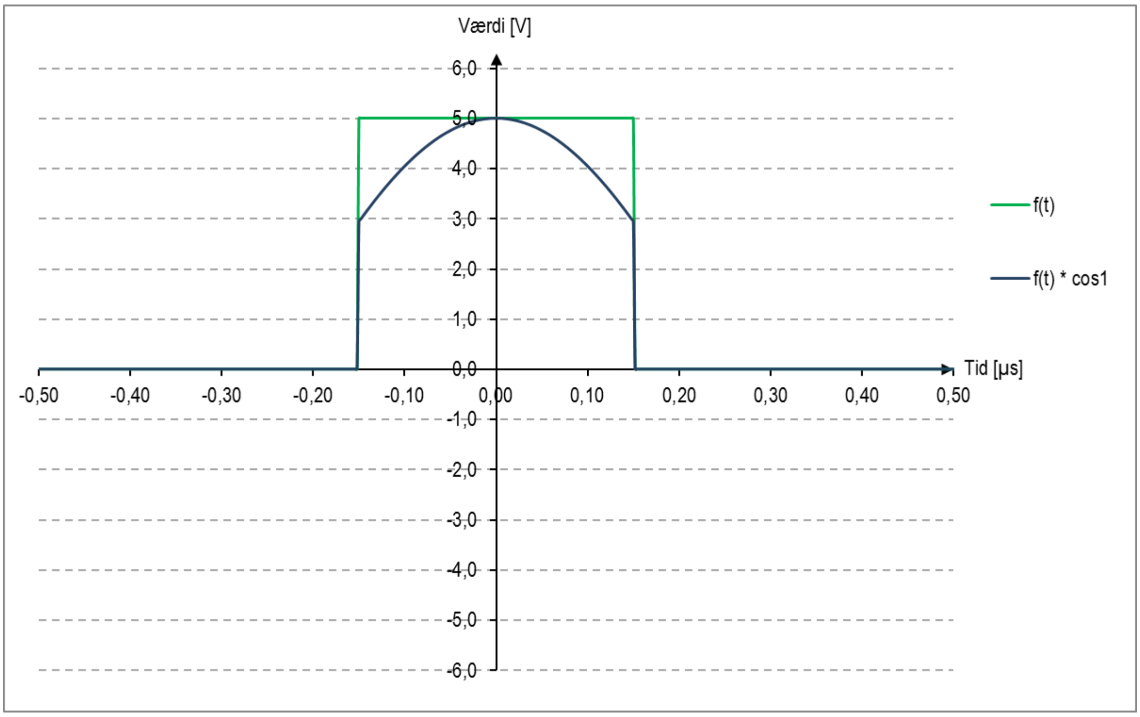
$b_{n\text{-}30} = 0$, n = 1, 2, 3, ….. (23).

Herefter betragtes a_n-koefficienterne. Først a_{n-70} ved figur 43.



Figur 43. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos1 = f(t) · $cos\left(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}\right)$

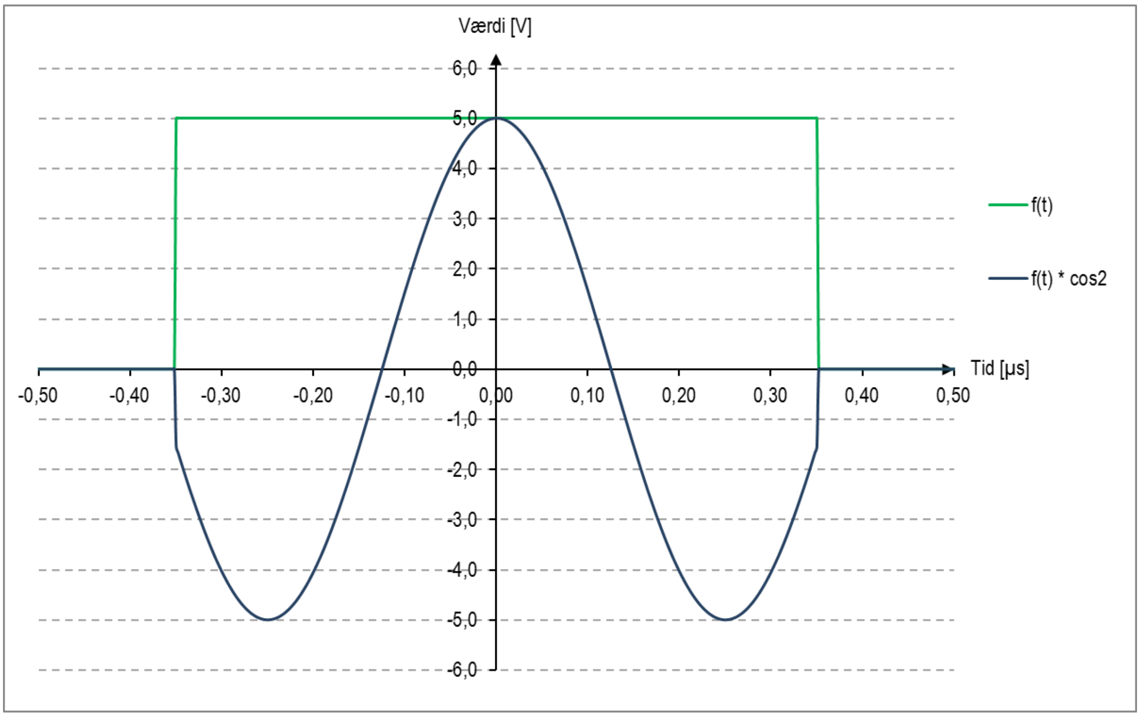
Dernæst a_{n-30} ved figur 44.



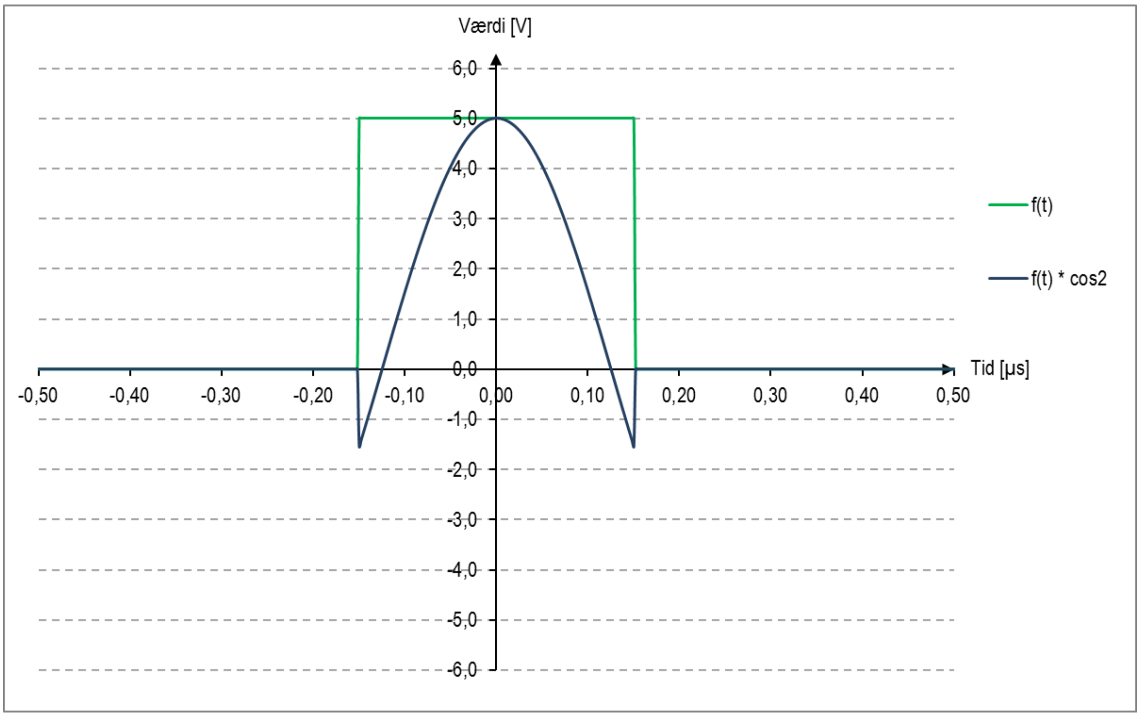
Figur 44. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos1 = f(t) · $cos\left(1 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}\right)$

Umiddelbart bemærkes, at både a_{1-70} og a_{1-30} er positive, og ved at nærstudere figurerne indses, at arealerne er lige store, og dermed $a_{1-70} = a_{1-30}$. De numeriske beregninger foretages senere.

Til evaluering af $a_{2\text{-}70}$ og $a_{2\text{-}30}$ betragtes henholdsvis figurerne 45 og 46.



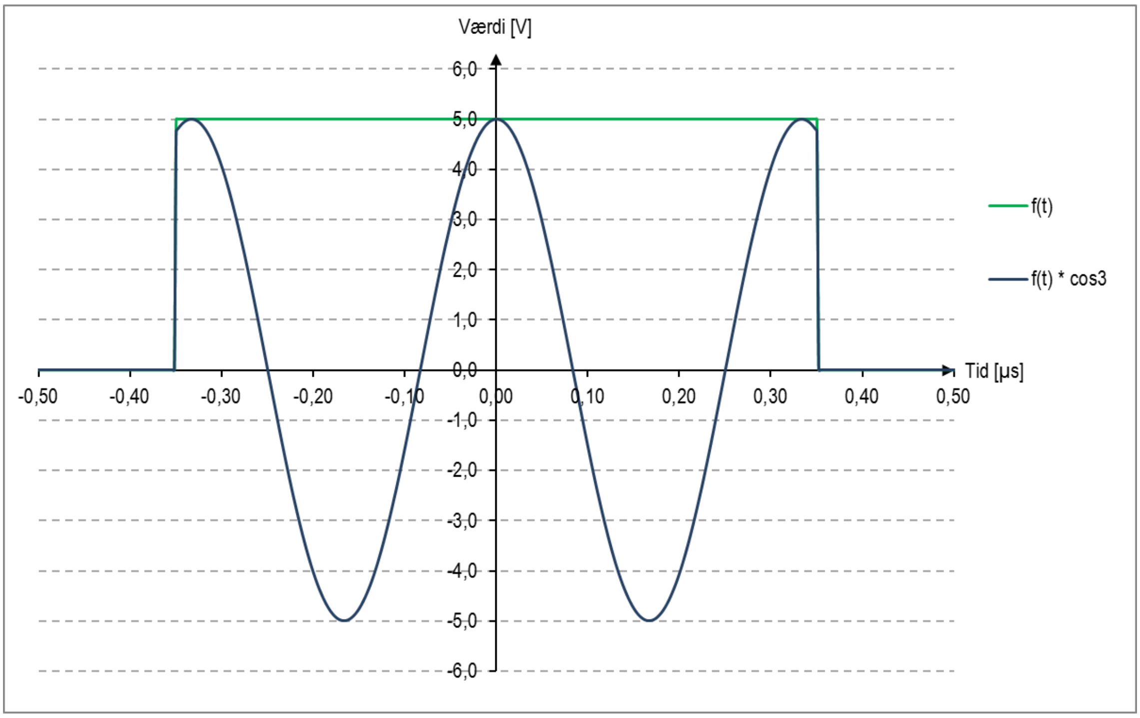
Figur 45. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos2 = $f(t) \cdot cos\left(2 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}\right)$



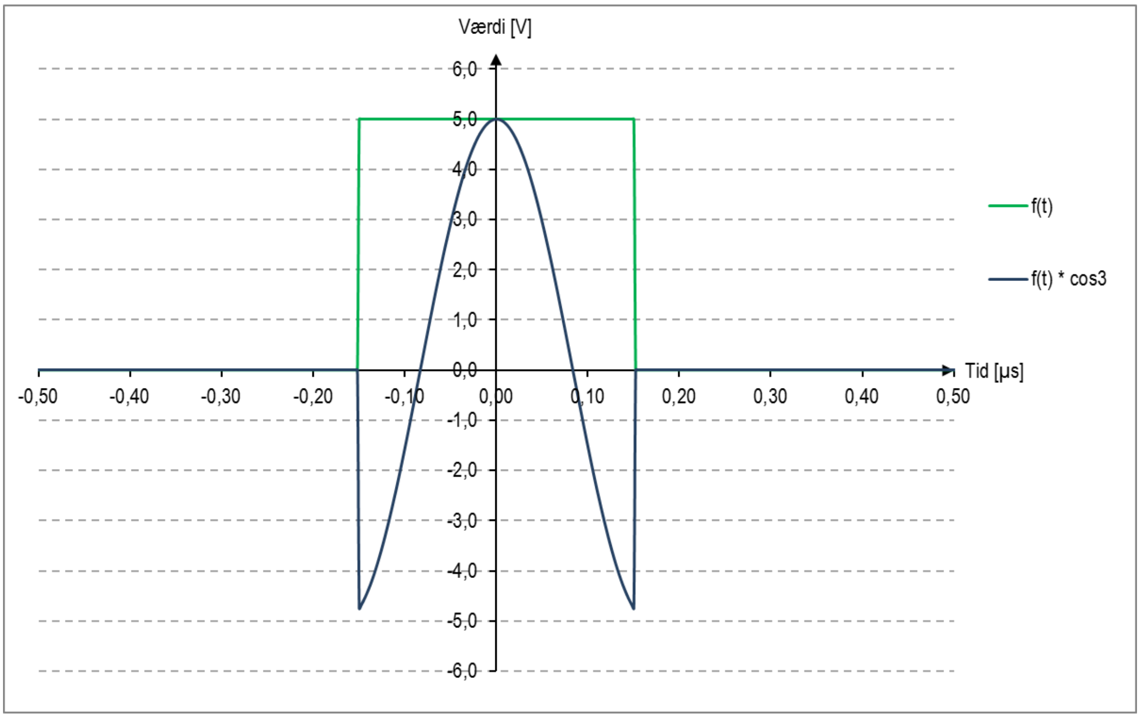
Figur 46. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos2 = $f(t) \cdot cos\left(2 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s}\right)$

Her bemærkes, at $a_{2\text{-}70}$ er negativ og $a_{2\text{-}30}$ er positiv, og ved at nærstudere figurerne indses, at de absolutte værdier af arealerne er lige store, og dermed $a_{2\text{-}70} = -\ a_{2\text{-}30}$. De numeriske beregninger foretages senere. Disse resultater betyder også, at nu eksisterer den 2. harmoniske for en duty cycle forskellig fra 50 %. For denne duty cycle på 50 % var netop alle de lige harmoniske ikke-eksisterende.

Til evaluering af $a_{3\text{-}70}$ og $a_{3\text{-}30}$ betragtes henholdsvis figurerne 47 og 48.



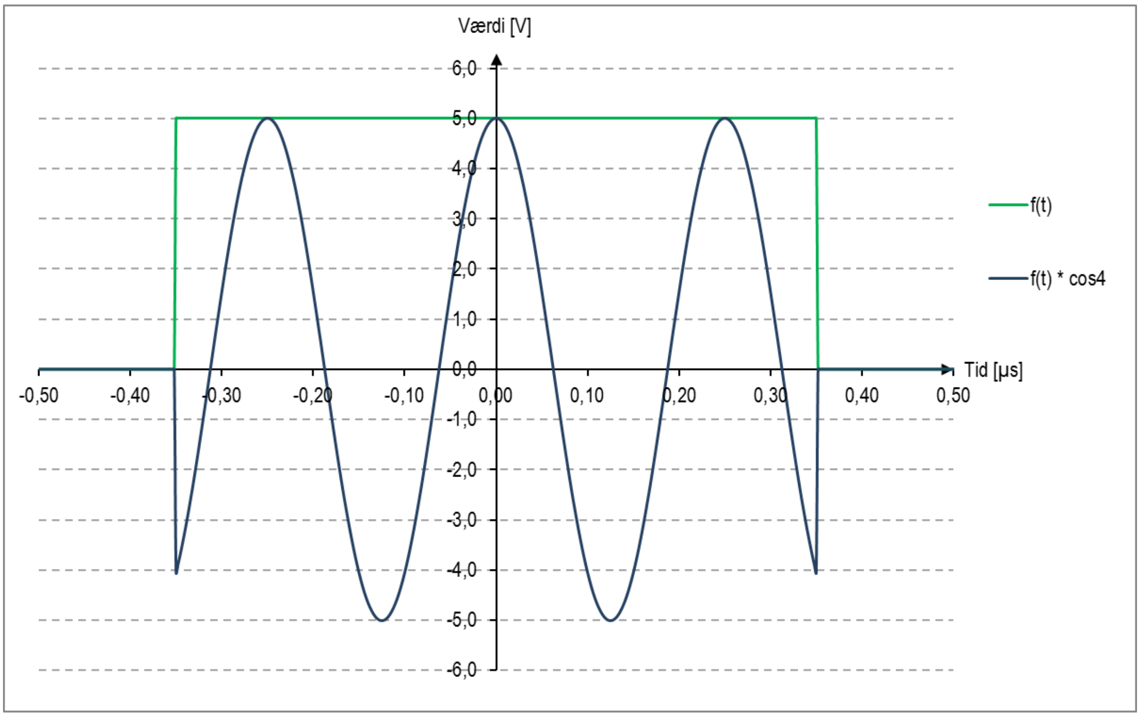
Figur 47. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos3 = f(t) · $cos(3 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



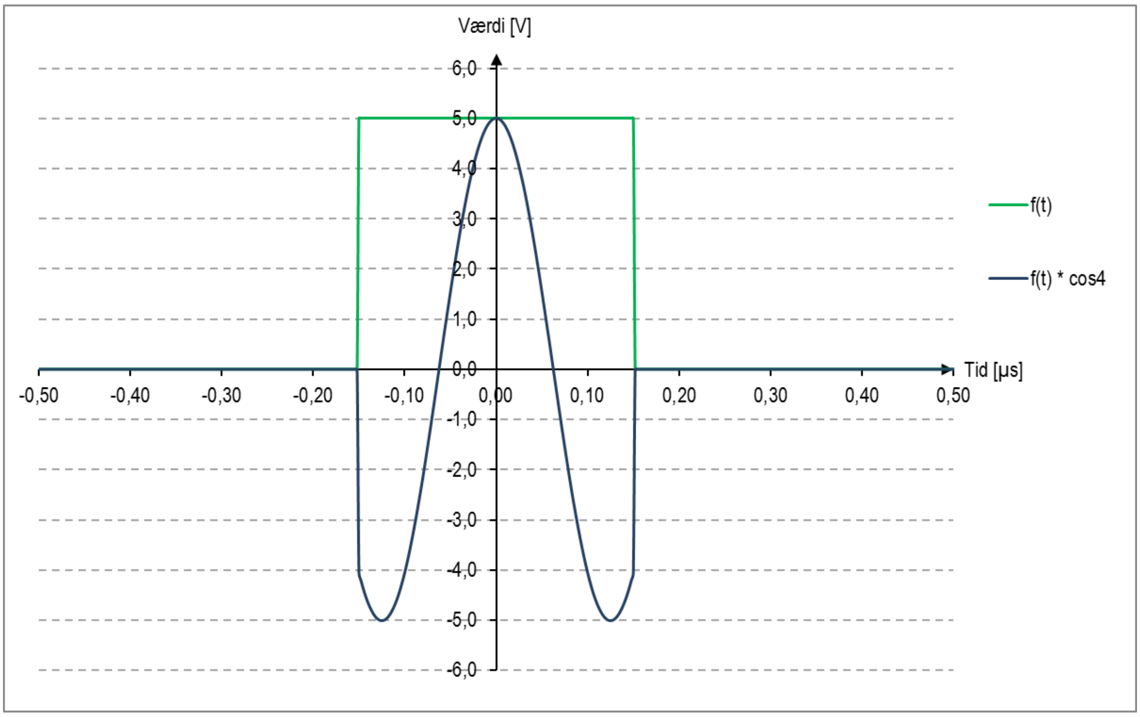
Figur 48. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos3 = f(t) · $cos(3 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

Fra figurerne ses, at både $a_{3\text{-}70}$ og $a_{3\text{-}30}$ er positive, og ved at nærstudere figurerne indses, at arealerne er lige store, og dermed $a_{3\text{-}70} = a_{3\text{-}30}$. Igen foretages de numeriske beregninger senere.

Til evaluering af $a_{4\text{-}70}$ og $a_{4\text{-}30}$ betragtes henholdsvis figurerne 49 og 50.



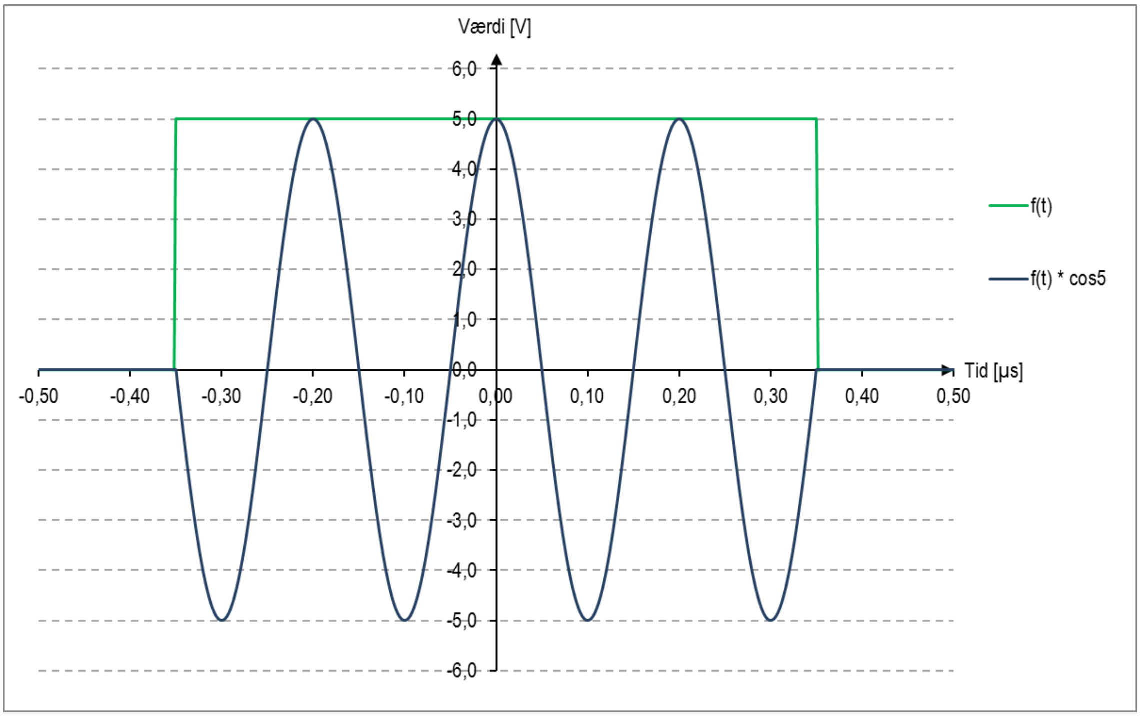
Figur 49. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos4 = $f(t) \cdot cos(4 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



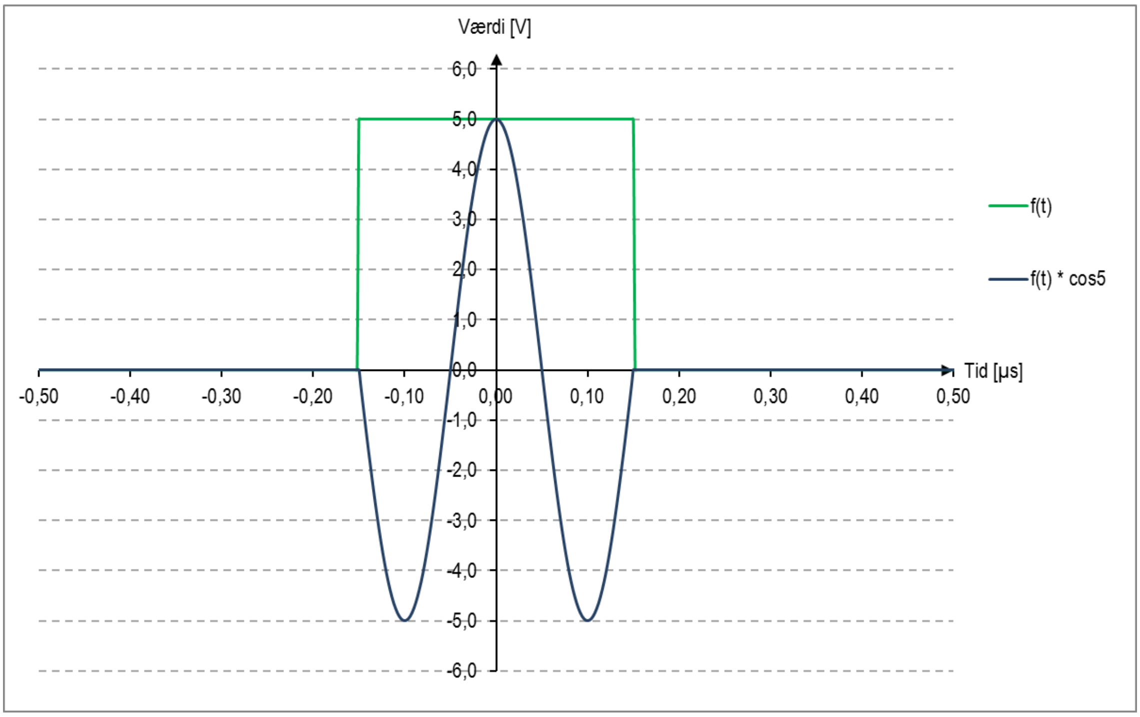
Figur 50. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos4 = $f(t) \cdot cos(4 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

Her bemærkes, at $a_{4\text{-}70}$ er positiv og $a_{4\text{-}30}$ er negativ, og ved at nærstudere figurerne indses, at de absolutte værdier af arealerne er lige store, og dermed $a_{4\text{-}70}$ = - $a_{4\text{-}30}$. De numeriske beregninger foretages senere. Hermed eksisterer også den 4. harmoniske for en duty cycle forskellig fra 50 %.

Til evaluering af $a_{5\text{-}70}$ og $a_{5\text{-}30}$ betragtes henholdsvis figurerne 51 og 52.



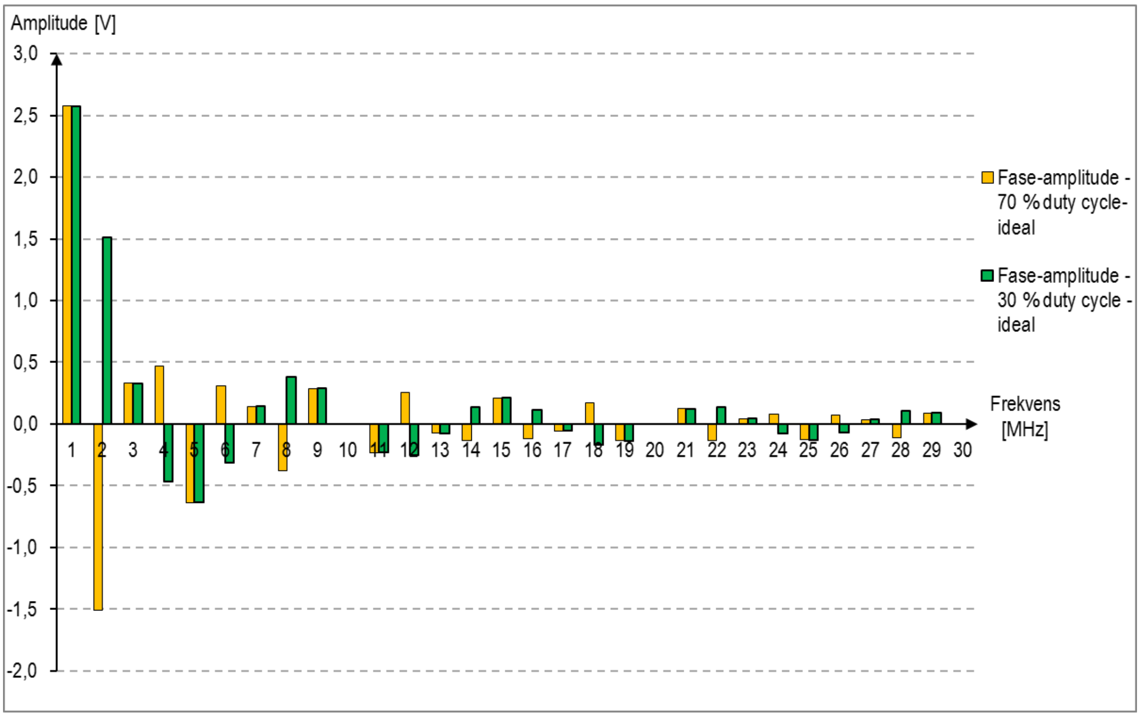
Figur 51. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos5 = $f(t) \cdot cos(5 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$



Figur 52. Funktionsforløbet for det digitale signal f(t) og produktet f(t) · cos5 = $f(t) \cdot cos(5 \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{1{,}0\ \mu s})$

Fra figurerne ses, at både a_{570} og a_{530} er negative, og ved at nærstudere figurerne indses, at arealerne er lige store, og dermed $a_{570} = a_{530}$. De numeriske beregninger foretages senere.

De omtalte numeriske beregninger foretages ved at anvende (17), (18) og (19). Resultaterne er vist grafisk ved figur 53.



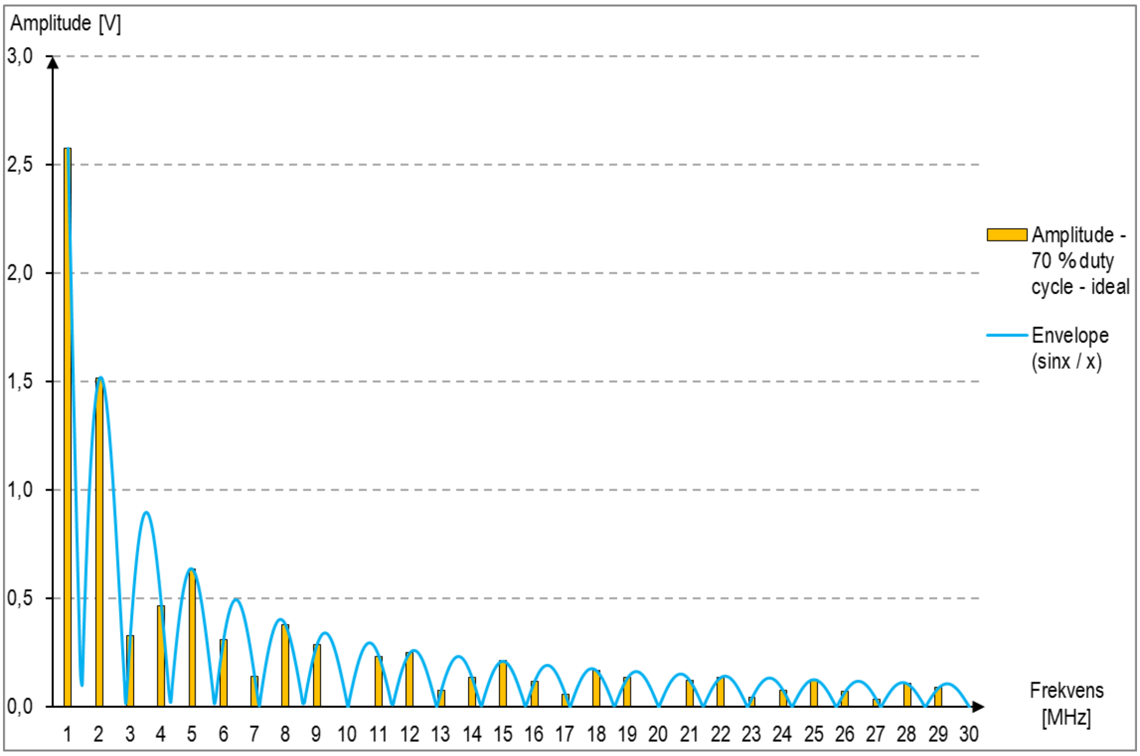
Figur 53. Udvidet frekvensdomænerepræsentationen for ideelle digitale signaler med duty cycle henholdsvis på 70 % og 30 %. I lighed med de tidligere grafer er frekvensområdet begrænset op til 30 MHz.

Det bemærkes, at der ikke helt er tale om de tidligere frekvensdomænegrafer som ved f.eks. figur 28, idet der her er medtaget informationer om de indbyrdes faseforhold for de enkelte harmoniske. Herfor betegnelsen ”udvidet frekvensdomænerepræsentation” og brug af betegnelsen ”Fase-amplitude” i grafen.

Til figur 53 kan man også bemærke følgende

1. Ved en duty cycle forskellig fra 50 % vil også de lige harmoniske optræde. Amplituderne af de 10., 20. og 30. harmoniske er dog 0. Ved en duty cycle på 50 % er alle de lige harmoniske ikke-eksisterende.
2. Amplitudeværdierne af alle de harmoniske er lige store, men faseforholdene varierer. For de ulige harmoniske har de 3., 7. 15., 21. og 29. harmoniske samme fase som den 1. harmoniske, mens resten har modsat fase. Dette gælder uanset om duty cycle er 70 % eller 30 %. For de lige harmoniske afhænger faserelationerne også af, om der er tale om duty cycle på 70 % eller 30 %, og bemærk også de indbyrdes faseskift for voksende lige harmoniske.
3. Ved anvendelse af en spektrumanalysator ville man ikke kunne bemærke de indbyrdes faseskift mellem de to værdier af duty cycle. En spektrumanalysator viser altid kun amplitudeværdierne, og de er jo netop ens for alle de harmoniske. Den grafiske metode viser her sin styrke ved umiddelbart at udpege de indbyrdes faseforhold.

Endelig vises på figur 54 indflydelsen af $\frac{\sin x_h}{x_h}$ – funktionen.



Figur 54. Frekvensdomænerepræsentationen for det ideelle digitale signal med duty cycle = 70 % begrænset af $\frac{\sin x_h}{x_h}$ *– funktionen for frekvenser op til 30 MHz.*

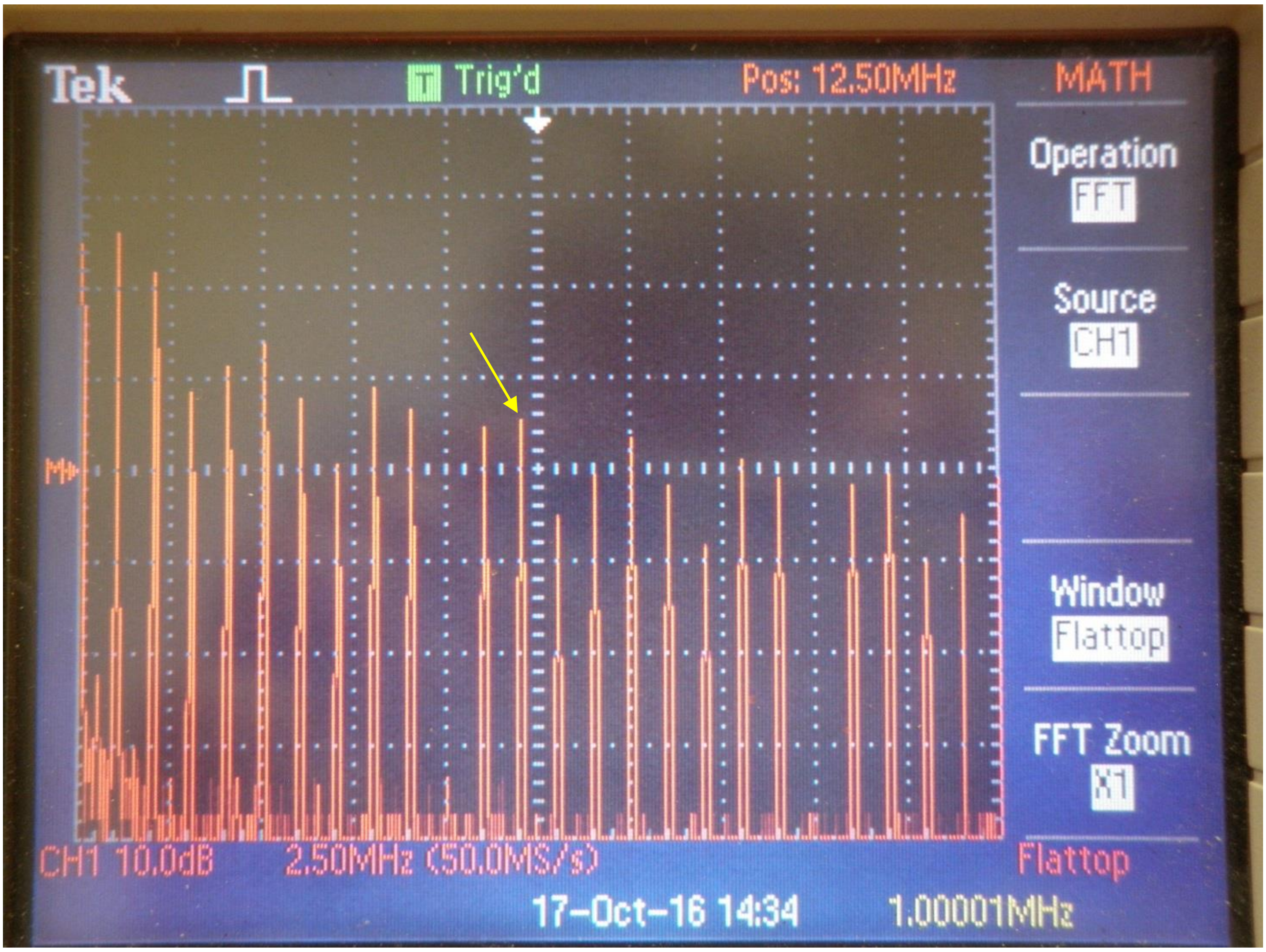
10 Sammenhæng mellem beregnede og målte værdier

Ved anvendelse af en arbitrær funktionsgenerator (Agilent 33521A) for generering af de digitale signaler forbundet til et digitalt oscilloskop (Tektronix TPS2024) er der foretaget sammenligninger mellem de beregnede værdier og de målte.

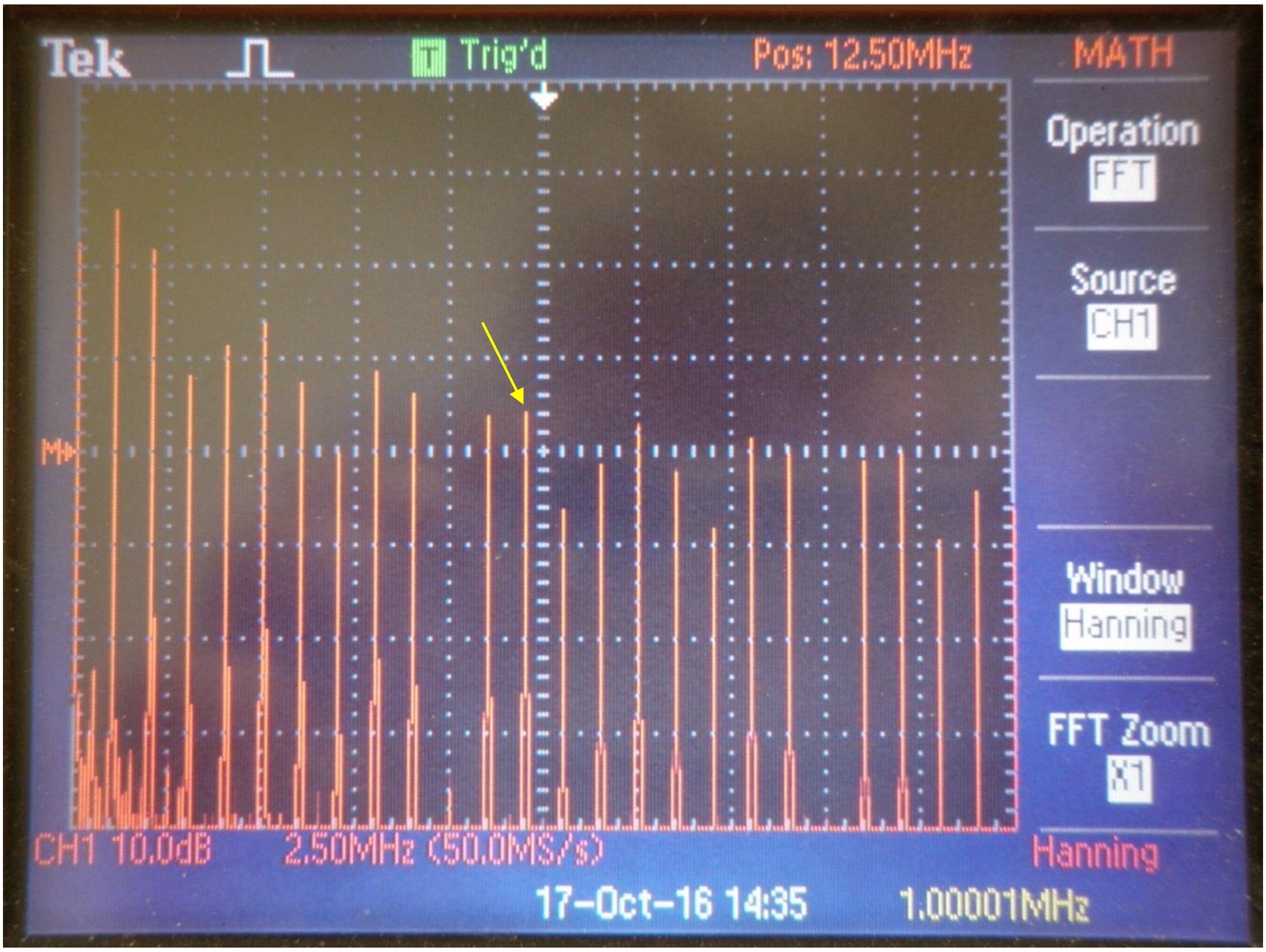
Det anvendte oscilloskop har indbygget en Fast Fourier Transform (FFT) – baseret spektrumanalysator, som anvendtes til måling af de digitale signaler i frekvensdomænet. Ved denne anvendelse skal man udvælge en vægtningsfunktion, og til de følgende målinger valgtes Flat top - funktionen, idet denne funktion fremhæves at give den mindste amplitude-måleusikkerhed.

Der eksisterer en lang række af disse udglatningsfunktioner. Her skal kun fremhæves, at hvis man ønskede mindste usikkerhed for frekvensbestemmelsen ville man stå sig ved at vælge Hann -vægtningsfunktionen (denne benævnes også tit Hanning – vægtningsfunktionen). For en hurtig indføring i frekvensdomæneanalyse og valg af vægtningsfunktioner kan henvises til [5].

På de følgende billeder, figur 55 og 56, er vist frekvensdomænet målt med TPS2024 med henholdsvis Flat top - og Hann – vægtningsfunktionerne.



Figur 55. Frekvensdomæneanalyse udført på TPS2024 med Flat top – vægtningsfunktion.



Figur 56. Frekvensdomæneanalyse udført på TPS2024 med Hann (Hanning) – vægtningsfunktion.

Det bemærkes, at der kun kan konstateres minimale forskelle for de viste amplitudeværdier mellem valget af de to vægtningsfunktioner. Denne lille forskel kan f.eks. konstateres ved at betragte visningen for amplitudeværdierne umiddelbart til venstre for skærmens midte (markeret med de gule pile). Værdien hørende til Hann – vægtningen er knap en delstreg mindre en den tilsvarende visning ved brug vaf Flat top – vægtningen.

For oscilloskopet blev en selvkalibrering foretaget før målingerne. Ud fra det oplyste i databladet for TPS2024 [6] skønnes måleusikkerhed at være i størrelsesordenen ± 4 % for amplitudemålingerne og væsentlig mindre for frekvensmålingerne.

De mindste T_r - og T_f – værdier, som impulsgeneratoren kunne generere var 0,010 µs, og derfor er disse værdier anvendt ved beregningerne efter (17), (18) of (19). Med oscilloskopfunktionens målemuligheder indstilledes impulsgeneratoren således til duty cycle på henholdsvis 30 %, 50 % og 70 %. I alle tre tilfælde var A = 5,00 V og f_D = 1,00 MHz.

Via curser-funktionen kan de harmoniske udvælges. Funktionen hjælper med til at udvælge niveauet for den pågældende harmoniske, idet maksimalniveauet udpeges automatisk, når curseren er placeret tæt ved frekvensen for den harmoniske. Niveauet udlæses i dB med referenceniveauet 0 dB = 1 V RMS.

Den målte spændingsamplitude $a_{nmålt}$ findes hermed fra den aflæste dB-amplitude a_{ndB} ved følgende formel

$$a_{\text{nmålt}} = \sqrt{2} \cdot 10^{\frac{a_{\text{ndB}}}{20}} \qquad (24)$$

I skemaform opnåedes følgende

Parametre:	$T_r = T_f$ = 0,010 µs		Duty cycle = 50 %	
Postuleret frekvens [MHz]	Målt frekvens [MHz]	Beregnet amplitude [V]	Målt amplitude	
			a_{ndB} [dB]	$a_{nmålt}$ [V]
1,00	1,00	3,18	7,03	3,18
2,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
3,00	3,00	1,06	- 2,57	1,05
4,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
5,00	5,00	0,63	- 6,97	0,63
6,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
7,00	7,00	0,45	- 10,2	0,44
8,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
9,00	9,00	0,35	- 12,6	0,33
10,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
11,00	11,00	0,28	- 14,2	0,28

Der er således særdeles god overensstemmelse mellem de forventede og de målte værdier.

Parametre:	$T_r = T_f$ = 0,100 µs		Duty cycle = 50 %	
Postuleret frekvens [MHz]	Målt frekvens [MHz]	Beregnet amplitude [V]	Målt amplitude	
			a_{ndB} [dB]	$a_{nmålt}$ [V]
1,00	1,00	3,13	7,03	3,18
2,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
3,00	3,00	0,91	- 3,37	0,96
4,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
5,00	5,00	0,41	- 10,2	0,44
6,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
7,00	7,00	0,17	- 16,2	0,22
8,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
9,00	9,00	0,04	- 24,2	0,09
10,00	Ikke målelig (i støjgulv)	0	Ikke målelig (i støjgulv)	
11,00	11,00	0,03	- 39,8	0,01

Der konstateres god overensstemmelse mellem de forventede og de målte værdier, idet måleusikkerheden må forventes at være betydelig for de mindste målte amplitudeværdier (mindre end 0,1 V). For de mindste amplitudemålinger konstateredes også betydelige tilfældige fluktuationer i størrelsesordenen ± 10 – 20 % for måleværdierne.

For $T_r = T_f$ = 0,010 µs og duty cycle på 30 % og 70 % opnåedes samme gode overensstemmelse for de første 5 frekvenser (1,00 MHz, 2,00 MHz, 3,00 MHz, 4,00 MHz og 5,00 MHz) både for frekvens og amplitude.

Specielt noteredes også, at der ikke var synlig og målbar forskel for det viste frekvensdomænespektrum mellem de to duty cycle på 70 % og 30 %. Den grafiske analyse understøttet af numeriske beregninger påviser imidlertid, at der vil optræde et fortegnsskifte for fasen af de harmoniske ved et skifte i duty cycle mellem 70 % og 30 %. Som før nævnt kan disse faseskift ikke erkendes ved måling vha. en spektrumanalysator.

11 Afslutning og opsummering

- Transformationen fra tids- til frekvensdomæne blev behandlet overvejende grafisk for at fremme den intuitive forståelse af koblingen mellem de to begreber.
- Den grafiske behandling blev understøttet af få nødvendige analytiske udtryk for at fastlægge numeriske størrelser.
- Ved den grafiske behandling belystes de frekvens- og specielt fasemæssige relationer, som opstår når et digitalt signals duty cycle varierer.
- Endelig blev de teoretiske resultater sammenknyttet med resultaterne af faktiske målinger udvisende god overensstemmelse.

12 Referencer

[1] H. Elbrønd Jensen, "Matematisk Analyse Bind 4", Matematisk Institut, Danmarks Tekniske Højskole, 1975.

[2] http://www.sandv.com/downloads/0701deer.pdf

[3] I. S. Sokolnikof & R. M. Redheffer, "Mathematics of Physics and Modern Engineering", McGraw-Hill, New York, 1958.

[4] A. Hock, "Hochfrequenz-Messtechnik, Teil 1", Lexika: Grafenau, 1979.

[5] http://www.ni.com/white-paper/4844/en/

[6] http://www.tek.com/oscilloscope/tps2000-manual