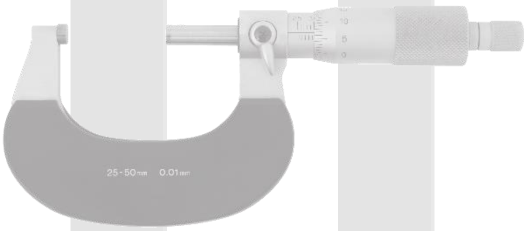
# MÅLING AF MASSE

UNDERVISNINGSELEMENT

# M1

—

UNDERVISNING
I MÅLETEKNIK

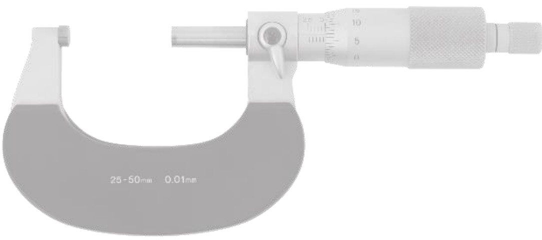


metrologi.dk

# MÅLING AF MASSE

Af Lars Nielsen, DFM - Danmarks Nationale Metrologiinstitut

1. udgave – Oktober 2020





*Metrologi.dk er finansieret af Styrelsen for Forskning og Innovation i perioden 2016 – 2018. Materiale er udarbejdet i et samarbejde mellem GTS-institutterne DFM A/S, FORCE Technology og DELTA - a part of FORCE Technology.*
*Læs mere om projektet på [www.metrologi.dk](http://www.metrologi.dk).*

*Grafisk design af: Henriette Schäfer Høyrup og David Balslev-Harder.*

## Indholdsfortegnelse

# 1 Indledning

Måling af masse er blandt de hyppigste målinger, som udføres i et moderne samfund. Mange varer afregnes efter masse, og måling af masse er et centralt element i styring af mange kemiske, biologiske og fysiske processer. Formålet med dette dokument er at forklare, hvad masse er, og hvordan masse måles ved hjælp af et vejeinstrument, bedre kendt som en vægt.

# 2 Hvad er *masse*?

Masse er en fysisk størrelse som i en vis forstand har været kendt eller i det mindste erfaret af menneskeheden i årtusinder. Nogle legemer er tungere at løfte end andre, og for at kvantificere dette indførte man i de tidlige civilisationer begrebet tyngde, som på dansk kaldes *vægt*[1]. Den engelske fysiker Isaac Newton (1643-1727) var den første som indså at et legemes vægt i realiteten er en kraft, som skyldes en massetiltrækning mellem legemet og jorden; denne kraft $F$ er proportional med produktet af legemets masse $m$ og jordens masse $M$ og omvendt proportional med kvadratet på afstanden $r$ mellem legemets og jordens tyngdepunkter:

$$F = G\frac{mM}{r^2}.$$

Faktoren $G$ kaldes gravitationskonstanten og er en såkaldt naturkonstant, som forventes at være konstant i hele universet. På jordens overflade er størrelsen

$$g = G\frac{M}{r^2},$$

den såkaldte *tyngdeacceleration*, nogenlunde konstant. Ved ækvator er tyngdeaccelerationen

$$g = 9.780 \text{ m/s},$$

mens den i Danmark er

$$g = 9.816 \text{ m/s}.$$

I nogle sammenhænge refereres der til den såkaldte *standardtyngdeacceleration*, som er sat til værdien

$$g_n = 9.80665 \text{ m/s (eksakt)}.$$

På månen er tyngdeaccelerationen ca. 6 gange mindre end på jorden, da månens masse $M_{\text{måne}}$ er 81 gange mindre end jordens masse $M_{\text{jord}}$, mens månens radius $r_{\text{måne}}$ er 3.7 gange mindre end jordens radius $r_{\text{jord}}$:

$$\frac{g_{\text{måne}}}{g_{\text{jord}}} = \frac{M_{\text{måne}}}{M_{\text{jord}}}\left(\frac{r_{\text{jord}}}{r_{\text{måne}}}\right)^2 = 0.17.$$

For en given tyngdeacceleration $g$ er tyngdekraften $F$ på et legeme med massen $m$ givet ved formlen

$$F = mg.$$

Denne formel er ækvivalent med Newtons 2. lov, der siger at, hvis et legeme med massen $m$ påvirkes med en kraft $F$, så får legemet en acceleration $a$, der opfylder ligningen

$$F = ma.$$

Formlen $F = mg$ udtrykker forskellen mellem legemets vægt (tyngde) og masse. Hvis vi skal bære et legeme på jorden skal vi bruge 6 gange så mange kræfter, som hvis vi skulle bære det på månen. Et legeme har derfor en vægt, der er 6 gange større på jorden end på månen, mens massen er præcis den samme. Skulle vi bære legemet, mens vi var ombord på et rumskib i frit fald, skulle vi ingen kræfter bruge, legemet er *vægtløst*. Formlen $F = ma$ fortæller os, at vi skal bruge samme kraft $F$ for at give et legeme med massen $m$ en given acceleration $a$, hvad enten vi befinder os på jorden, på månen eller ombord på et rumskib. Massen er således et mål for legemets *inerti*, dvs. dets modstand mod at blive bremset, sat i bevægelse eller skifte bevægelsesretning. Det er naturens vilje, at såvel massetiltrækning mellem legemer som legemers inerti kan beskrives ved en og samme fysiske størrelse, som vi har valgt at kalde masse.

# 3 Vejning i oldtiden

Vejning er en ældgammel kunst, som blev udført flere tusinde år før begrebet masse blev opfundet. De første vejeinstrumenter var ligearmede vægte. Konstruktionen var sandsynligvis inspireret af træåg, som anvendtes til at bære tunge ting; her erfarede man, hvad balance betyder. De tidligste kendte, ligearmede vægte stammer fra Mesopotamien, hvor de anvendtes 4000 f.Kr. De var fremstillet af et lige stykke træ

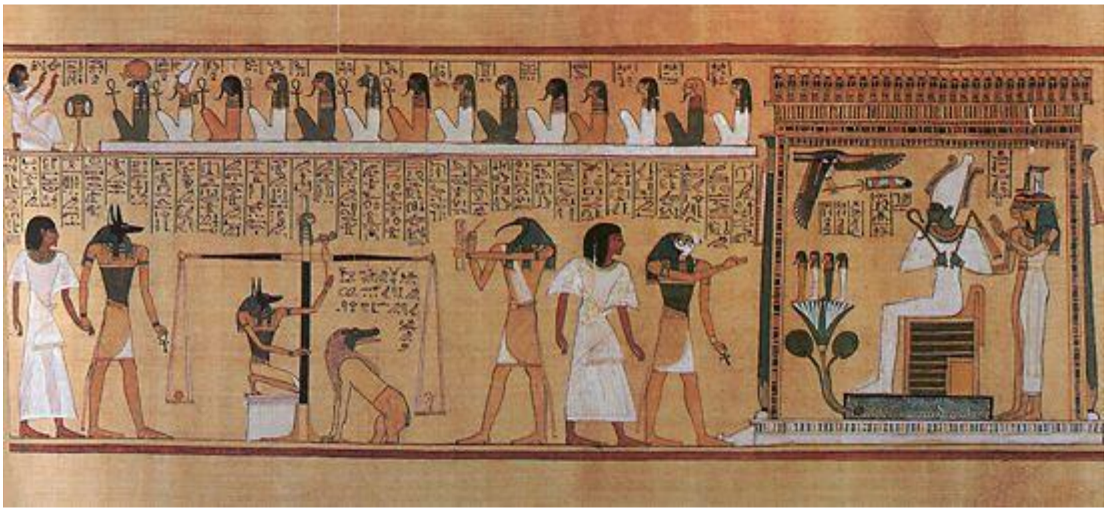
1 Bemærk at det danske ord 'vægt' også anvendes som betegnelse på et vejeinstrument og dermed har to vidt forskellige betydninger.

ophængt i en snor ført gennem et hul i midtpunktet af træstykket. Vægtens to skåle var ophængt i tråde, som var ført gennem huller boret i hver ende af træstykket. Objektet, som skulle vejes, blev placeret i den ene vægtskål, hvorefter der blev lagt lodder i den anden vægtskål, indtil vægten var i balance. Vægten af objektet i den ene vægtskål var da lig med vægten af lodder i den anden. I princippet er dette meget simpelt, men hvor får man lodderne fra? Der er ingen tvivl om at man har ledt i naturen efter ensartede objekter, som kunne fungere som lodder. Den gamle vægtenhed *karat* var således oprindeligt vægten af en Johannesbrødkerne, mens den engelske enhed *grain* betyder korn på dansk. Vægten af korn og kerner er dog ganske små, så i praksis anvendte man i oldtiden lodder af sten. Det var den lokale regent, som blandt andet af hensyn til indkrævning af skat, sørgede for at der var et system af lodder til rådighed i hans område.

# 4 Enheden for masse

Før 1795 fandtes der ikke enheder for masse og længde, som var baseret på naturlige uforanderlige størrelser. Hver region havde sit eget system for mål og vægt, og selv om enhederne måske havde samme navn, så var de ofte meget forskellige i størrelse. Under den franske revolution (1789-1799) blev det besluttet at lave "et fælles længde- og massemål for alle folk i verden". Længdeenheden *meter* blev defineret som 1/10 000 000 af afstanden fra nordpolen til ækvator langs den meridian, der løber gennem Paris, og masseenheden *kilogram* blev defineret som massen af 1/1000 kubikmeter vand ved den temperatur (4 °C), hvor vands massefylde er maksimal. Efter at have målt afstanden fra nordpolen til ækvator, lavede man en meterstok i platin. Herefter lavede man et kilogramlod i platin, hvis masse stemte overens med definitionen inden for datidens måleusikkerhed. Meterstokken og kilogrammet blev opbevaret i det franske nationalarkiv og benævnt *arkivmeteren* henholdsvis *arkivkilogrammet*; de anvendtes som *referencenormaler* for længe og masse i Frankrig indtil 1875.

Det franske enhedssystem for længe og masse, *metersystemet*, vakte interesse i omverden, og 20 maj 1875 indtrådte 17 lande, heriblandt Danmark, *Meterkonventionen*. Medlemmerne af konventionen forpligtigede sig til at indføre længdeenheden meter og masseenheden kilogram. Arkivmeteren blev erstattet med den *internationale meterprototype* fremstillet i 90 % platin og 10 % iridium, og arkivkilogrammet blev erstattet af den *internationale kilogramprototype* fremstillet i samme materiale. Begge prototyper blev opbevaret på *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM), som blev oprettet til formålet i en park i Sevres i udkanten af Paris. For at sikre ensartet mål og vægt i hele verden fik hvert medlem af



*Figur 1: Egyptisk papyrus fra omkring 1275 f.Kr., der viser skriveren Hunefers vej til dødens rige. På vejen skal hans hjerte sammenlignes med sandhedens fjer på sandhedens vægt, og kun hvis der er balance, får han lov at passere. Dæmonen Ammit sidder klar til at spise hjertet, hvis der ikke er balance. Papyrussen er udstillet på British Museum.*

Meterkonventionen udleveret en kopi af hver de to internationale protyper.

Indtil 20 maj 2019 blev masseenheden kilogram defineret som massen af den internationale kilogramprototype umiddelbart efter at være blevet rengjort og vasket efter en specificeret procedure, som omfattede rengøring med et gedeskind vædet i æter og alkohol, efterfulgt af vask med vanddamp. Den internationale kilogramprototype opbevares i en boks på BIPM sammen med 6 kopier, de såkaldte *vidner*. Indtil 2019 havde den kun været i brug fire gange, senest i 2014 og før da i 1989. Ved disse lejligheder blev vidnernes masse sammenlignet med massen af den internationale prototype, hvorefter masserne af BIPMs 1 kg *arbejdsnormaler* blev sammenlignet med vidnerne. BIPMs arbejdsnormaler anvendtes til at kalibrere medlemslandendes kopier af den internationale prototype, og på den måde forsøgte man at sikre, at enheden kilogram var den samme inden for en kendt måleusikkerhed overalt i verden.

Den internationale prototype er et menneskeskabt objekt, et *artefakt*. Som alt andet menneskeskabt er det forventeligt, at den internationale prototype har forandret sig over tid. Der er således ingen garanti for at enheden kilogram var den samme i 2018 som i 1895. Tværtimod har man observeret at forskellen mellem den internationale kilogramprotype og dens vidner har ændret sig signifikant igennem tiden. I perioden 1985-2018 blev der derfor arbejdet intenst på at indføre en ny definition af kilogrammet, som skulle baseres på en naturkonstant. Et atoms masse er (så vidt vi ved) uforanderlig, så man kunne f.eks. definere kilogrammet ved at tillægge brintatomet $^1$H massen

$$m(^1\mathrm{H}) = 1.673\,532\,839 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\ (\text{eksakt}).$$

En anden mulighed var at tillægge en eksakt værdi til en naturkonstant, hvis enhed er afledt af kilogrammet. Et eksempel er *Plancks konstant* $h$, som med den daværende definition af kilogrammet i 2018 havde værdien

$$h = 6.626\,070\,150 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{kg\ m/s^2}$$

med standardusikkerheden

$$u(h) = 0.000\,000\,069 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{kg\ m/s^2}.$$

Ved at ophøje denne værdi til en eksakt værdi, er kilogrammet låst fast til meteren og sekundet, som har sine egne definitioner.

Vanskeligheden ved en ny definition af kilogrammet består i at realisere enheden, dvs. at fremstille et fysisk objekt, som har massen 1 kg i henhold til sin definition. Disse vanskeligheder er overvundet i en sådan udstrækning, at man på Generalkonferencen for mål og vægt i november 2018 vedtog at definere kilogrammet ved at tillægge Plancks konstant værdien

$$h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{kg\ m/s^2}\ \ (\text{eksakt}).$$

Definitionen trådte i kraft 20 maj 2019, hvorefter alle i princippet kan bestemme massen af et objekt ved hjælp af en passende fysisk lov, hvor Plancks konstant $h$ indgår.

# 5 Fysiske principper bag vejning

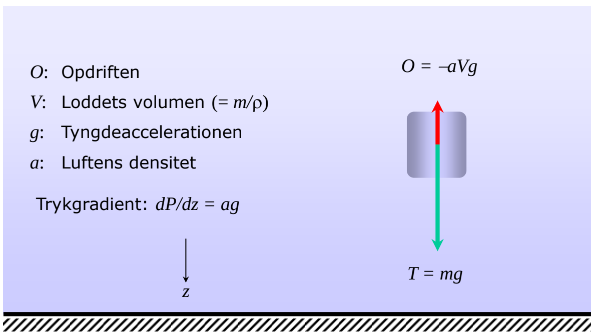
For at kunne tolke resultatet af en vejning korrekt, er det nødvendigt at gøre sig klart, hvilke fysiske principper eller love, vejning er baseret på.

## 5.1 Tyngdeloven

Ligesom i oldtiden er vejning af et objekt i dag sædvanlig vis baseret på tilstedeværelsen af en tyngdekraft.

Hvis objektet har massen $m$ og den lokale tyngdeacceleration betegnes $g$, da er tyngdekraften $T$ på objektet givet ved:

$$T = mg.$$




*Figur 2: Et lod omgivet af luft i jordens tyngdefelt er påvirket af to kræfter: Tyngdekraften $T$ og den modsat rettede kraft, opdriften $O$. Opdriften skyldes, at der på grund af tyngdefeltet og luftens densitet er en trykgradient, således at trykket er højere ved bunden af loddet end ved toppen af loddet.*

## 5.2 Archimedes lov

Vejning udføres sædvanlig vis i atmosfærisk luft. Luften består af molekyler, som har en masse, og som derfor også tiltrækkes af jordens tyngdefelt. Luftens densitet ved havets overflade, hvor lufttrykket er omkring 1013 hPa, er cirka 1.2 kg/m$^3$ ved 20 °C, hvilket er 831.8 gange mindre end densiteten af vand ved samme tryk og temperatur.

At vand yder en opdrift, har alle, der har været ude at svømme, observeret. Den græske filosof *Archimedes* (ca. 287-212 f.Kr.) ræsonnerede, at når et legeme nedsænkes helt eller delvis i en væske, taber det lige så meget i tyngde (vægt), som tyngden af den fortrængte væske. Tilsvarende yder luften en opdrift; den er bare ca. 830 gange mindre end den opdrift, som vand yder. Det er denne opdrift, der gør det muligt at opsende en varmluftballon.

Hvis et legeme har voluminet $V$ og befinder sig i luft (eller væske) med densiteten $a$, er massen af den fortrængte luft lig med $aV$. Tyngdekraften $T_a$ på den fortrængte luft er således givet ved

$$T_a = aVg.$$

Opdriften $O$ på legemet har samme størrelse som tyngdekraften på den fortrængte luft, men er modsat rettet (se Figur 2):

$$O = -T_a = -gaV.$$

Den samlede kraft $F$ på legemet er således

$$F = T + O = (m - aV)g.$$

Indsættes legemets densitet $\rho = m/V$ i dette udtryk, fås den grundlæggende ligning for vejning i luft:

*Ligning 1:*

$$F = T + O = m\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)g.$$

Vi er nu i stand til at besvare spørgsmålet: "Hvad vejer mest: 1 kg fjer eller 1 kg bly?". Find svaret i Boks 1.

# 6 Vejning på en ligearmet vægt

Selv om ligearmede vægte ikke længere bruges i praksis, kan det være nyttigt at se på, hvordan vejning på en sådan vægt udføres, og hvordan vejeresultatet korrigeres for luftopdrift:

Et objekt med ukendt masse $m$ og kendt densitet $\rho$ lægges i venstre vægtskål på en ideel, ligearmet vægt omgivet af luft med densitet $a$. Lodder med kendte masser og kendt densitet $\rho_\mathrm{R}$ tilføres til højre vægtskål, indtil de to vægtskåle er i balance. Massen $m_\mathrm{R}$ af lodder tilført til højre vægtskål tælles sammen, og resultatet af vejningen beregnes på følgende måde:

Den samlede kraft $F$ på venstre vægtskål er, jævnfør Ligning 1:,

$$F = m\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)g,$$

mens den samlede kraft på højre vægtskål er

$$F_\mathrm{R} = m_\mathrm{R}\left(1 - \frac{a}{\rho_\mathrm{R}}\right)g.$$

Da vægten er ligearmet, og de to vægtskåle er i ligevægt, gælder der:

$$F = F_\mathrm{R},$$

hvilket medfører, at den søgte masse $m_\mathrm{X}$ er givet ved udtrykket

### Boks 1: Hvad vejer mest: 1 kg fjer eller 1 kg bly?

Bly har densiteten $\rho_\mathrm{bly} = 11\,340\ \mathrm{kg/m^3}$. Voluminet af den mængde bly, som har massen $m_\mathrm{bly} = 1\ \mathrm{kg}$, er derfor $V_\mathrm{bly} = m_\mathrm{bly}/\rho_\mathrm{bly} = 8.818 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3}$. Hvis blyet vejes i luft med densiteten $a = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$, er opdriften på blyet divideret med den lokale tyngeacceleration lig med

$O_\mathrm{bly}/g = -aV_\mathrm{bly} = -0.11\ \mathrm{g}.$

Fjer består af proteinet *keratin*, som har en densitet på omkring 1300 $\mathrm{kg/m^3}$. Sættes densiteten af fjer, $\rho_\mathrm{fjer}$ til denne værdi, har den mængde fjer, som har massen $m_\mathrm{fjer} = 1\ \mathrm{kg}$, voluminet $V_\mathrm{fjer} = m_\mathrm{fjer}/\rho_\mathrm{fjer} = 7.692 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3}$. Hvis fjerene vejes i luft med densiteten $a = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$, er opdriften på fjerene divideret med den lokale tyngeacceleration lig med

$O_\mathrm{fjer}/g = -aV_\mathrm{fjer} = -0.92\ \mathrm{g}.$

Ved vejning i atmosfærisk luft vil 1 kg fjer vil derfor veje ca. 0.81 g mindre end 1 kg bly.

*Ligning 2:*

$$m = m_R \frac{1 - \frac{a}{\rho_R}}{1 - \frac{a}{\rho}}.$$

Bemærk at tyngdeaccelerationen $g$ ikke indgår i dette udtryk, da det er antaget, at den er den samme ved begge vægtskåle.

Da luftens densitet er mindst 500 gange mindre end densiteten af væsker og faste stoffer, kan vi ved hjælp af tilnærmelsen[2]

$$\frac{1-\delta_1}{1-\delta_2} \cong 1 + \delta_2 - \delta_1$$

omskrive Ligning 2 til

*Ligning 3:*

$$m = m_R \left(1 + a\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_R}\right)\right).$$

Ligning 3 viser, at massen af det vejede objekt i almindelighed afviger fra massen af de lodder, som udbalancerer objektet på den ligearmede vægt. Kun hvis densiteten $\rho$ af objektet er lig densiteten $\rho_R$ af lodderne, er de to masser ens! Er densiteterne forskellige, skal der udføres luftopdriftskorrektion som beskrevet i Ligning 3.

# 7 Fjedervægtsmodellen

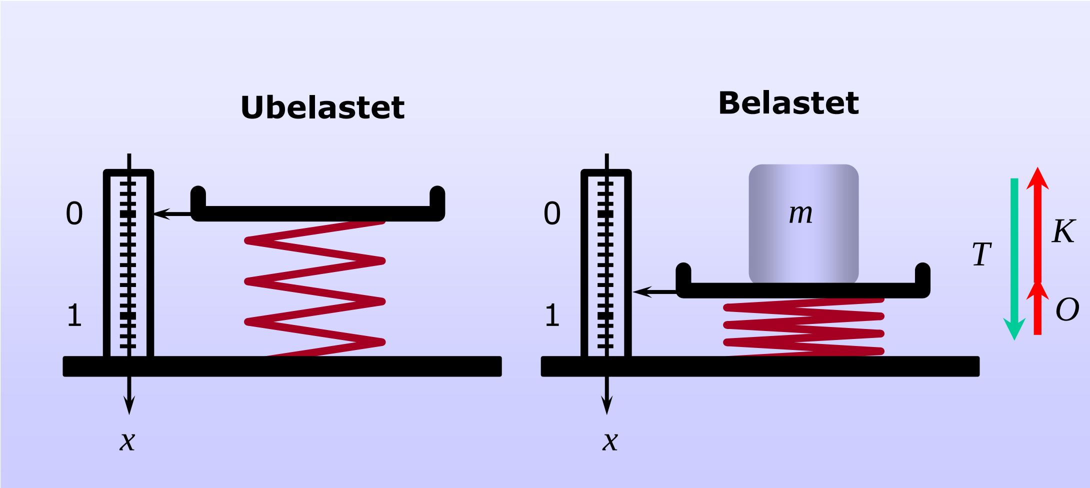
For at kunne anvende en moderne elektronisk vægt korrekt, er det vigtigt at forstå, hvordan den virker, og hvad tallet i vægtens display egentlig betyder. Som hjælp til at opnå denne forståelse betragter vi den simple fjedervægt vist i Figur 3.

Vægten består af en ideel fjeder, som yder en opadrettet kraft $K$, der er proportional med fjederens sammentrykning $x$:

*Ligning 4*:

$$K = -kx,$$

hvor $k$ er *fjederkonstanten*. På toppen af fjederen er der monteret en vejeplade med en viser, der peger hen på en gradueret skala, hvor fjederens sammentrykning måles. Fjedervægten nulstilles ved at sørge for, at viseren peger på $x = 0$ i ubelastet tilstand.




*Figur 3: Fjedervægt baseret på en ideel fjeder og en vejeplade med en pointer, der peger på en gradueret skala. Når vægten belastes med en lod med massen m sammentrykkes fjederen og yder en fjederkraft $K$, der sammen med opdriften $O$ på loddet udbalancerer tyngdekraften $T$ på loddet.*

[2] Eksempel på tilnærmelsens nøjagtighed: $\frac{1+0.002}{1-0.002} = 1.004\,008 \cong 1 + 0.002 - (-0.002)$.

Når vægten belastes med et lod med masse $m$ og densitet $\rho$, vil fjederen få en sammentrykning $x$ målt på den graduerede skala. Sammentrykningen vil være præcis så stor, at summen af tyngdekraften, opdriften og fjederkraften er lig nul:

$$T + O + K = 0.$$

Indsættes Ligning 1 og Ligning 4 i dette udtryk, fås:

$$m\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)g - kx = 0.$$

Vægtens respons $x$ er således givet ved:

*Ligning 5:*

$$x = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{a}{\rho}\right).$$

Vægtens respons $x$ afhænger således ikke blot af loddets masse $m$, men også af loddets densitet $\rho$, luftens densitet $a$, den lokale tyngdeacceleration $g$ og naturligvis vægtens fjederkonstant $k$.

## 7.1 Kalibrering

Sammenhængen mellem vægtens respons $x$ og massen $m$ af objektet på vejepladen etableres ved at placere et lod med kendt masse $m_\mathrm{R}$ og densitet $\rho_\mathrm{R}$ på vejepladen og aflæse vægtens tilhørende respons $x_\mathrm{R}$:

$$x_\mathrm{R} = \frac{m_\mathrm{R} g}{k}\left(1 - \frac{a_\mathrm{R}}{\rho_\mathrm{R}}\right).$$

Luftens densitet under denne *kalibrering* betegnes $a_\mathrm{R}$, således at den kan skelnes fra luftens densitet $a$ ved senere brug af vægten. Ved kalibreringen bestemmes forholdet $k/g$:

$$\frac{k}{g} = \frac{m_\mathrm{R}}{x_\mathrm{R}}\left(1 - \frac{a_\mathrm{R}}{\rho_\mathrm{R}}\right).$$

Dette forhold indsættes i Ligning 5, hvorefter vi kan bestemme massen $m$ af et vejet objekt:

*Ligning 6:*

$$m = \frac{x}{x_\mathrm{R}} m_\mathrm{R} \frac{1 - \frac{a_\mathrm{R}}{\rho_\mathrm{R}}}{1 - \frac{a}{\rho}}.$$

Da luftens densitet er mindst 500 gange mindre end densiteten af væsker og faste stoffer, kan vi ved hjælp af tilnærmelsen

$$\frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_2} \cong 1 + \delta_2 - \delta_1$$

omskrive Ligning 6 til

*Ligning 7:*

$$m = \frac{x}{x_\mathrm{R}} m_\mathrm{R}\left(1 + \frac{a}{\rho} - \frac{a_\mathrm{R}}{\rho_\mathrm{R}}\right),$$

som er nemmere at arbejde med og tilstrækkelig nøjagtig i praksis.

Fjedervægten kan anvendes som model for alle moderne, elektroniske vægte, hvad enten de er baseret på *vejeceller* eller *elektromagnetisk kraftkompensation*. I begge typer af vægte omsættes kraften $F = T + O$ til et proportionalt elektrisk signal *x*.

## 7.2 Justering

I modsætning til fjedervægten, har de elektroniske vægte en regneenhed, som omregner det elektriske signal $x$ til en visning $I$ på et digitalt display:

$$I = \frac{x}{x_\mathrm{R}} m_\mathrm{R}.$$

Ligning 7 skal da erstattes med

*Ligning 8:*

$$m = I\left(1 + \frac{a}{\rho} - \frac{a_\mathrm{R}}{\rho_\mathrm{R}}\right).$$

Forholdet $m_\mathrm{R}/x_\mathrm{R}$ bestemmes som ovenfor beskrevet og lagres i vægtens regneenhed. Herved *justeres* vægten til at give en ønsket visning. Nogle vægte har et indbygget lod med kendt masse $m_\mathrm{R}$, som ved hjælp af en motor placeres på vejecellen eller den elektromagnetiske kraftkompensationsenhed. Justering aktiveres af brugeren ved tryk på en knap, eller den foretages automatisk af vægten, når der er gået et vis tidsrum siden sidste justering, eller når en temperatursensor har registreret en signifikant ændring i vægtens temperatur. Vi siger, at vægte med indbygget lod har *selvjustering*.

Hvis vægten er justeret umiddelbart inden vejningen af et objekt, er luftens densitet den samme ved kalibrering som ved efterfølgende brug. Indsættes $a_\mathrm{R} = a$ i Ligning 8 fås:

*Ligning 9:*

$$m = I\left(1 + a\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_\mathrm{R}}\right)\right).$$

Bemærk ligheden mellem denne ligning, som beskriver vejning på en nyligt justeret elektronisk vægt, og Ligning 2 i afsnit 6, som beskriver vejning på en ligearmet vægt.

Hvor hyppigt en vægte bør justeres afhænger af *antallet af delinger* på vægten, som er lig med forholdet

$$n = \mathrm{Max}/d,$$

hvor Max er den maksimale belastning for vægten (vægtens *kapacitet*) og $d$ er vægtens *delingsværdi* (opløsning). Se Boks 2.

# 8 Vejning på elektronisk vægt

I dette afsnit ser vi på, hvordan man tolker resultatet af en vejning udført på en perfekt vægt, som ikke har en eneste af de fejl, som man ellers kan forvente at en vægt har i praksis. Herefter ser vi på, hvilke typiske fejl en vægt har, og i hvilken udstrækning man eventuelt kan korrigere for dem.

| $\rho$ kg/$m^3$ | $(m-w)/w$ mg/g | $\rho$ kg/$m^3$ | $(m-w)/w$ mg/g |
|---|---|---|---|
| **500** | 2.250 | **11500** | -0.046 |
| **1000** | 1.050 | **12000** | -0.050 |
| **1500** | 0.650 | **12500** | -0.054 |
| **2000** | 0.450 | **13000** | -0.058 |
| **2500** | 0.330 | **13500** | -0.061 |
| **3000** | 0.250 | **14000** | -0.064 |
| **3500** | 0.193 | **14500** | -0.067 |
| **4000** | 0.150 | **15000** | -0.070 |
| **4500** | 0.117 | **15500** | -0.073 |
| **5000** | 0.090 | **16000** | -0.075 |
| **5500** | 0.068 | **16500** | -0.077 |
| **6000** | 0.050 | **17000** | -0.079 |
| **6500** | 0.035 | **17500** | -0.081 |
| **7000** | 0.021 | **18000** | -0.083 |
| **7500** | 0.010 | **18500** | -0.085 |
| **8000** | 0 | **19000** | -0.087 |
| **8500** | -0.009 | **19500** | -0.088 |
| **9000** | -0.017 | **20000** | -0.090 |
| **9500** | -0.024 | **20500** | -0.091 |
| **10000** | -0.030 | **21000** | -0.093 |
| **10500** | -0.036 | **21500** | -0.094 |
| **11000** | -0.041 | **22000** | -0.095 |

*Tabel 1.* Relativ *korrektion for luftopdrift ved vejning i luft med densitet $a = 1.2\ kg/m^3$ på en ideel vægt justeret med et lod med densitet $\rho_0 = 8000\ kg/m^3$. Størrelsen $w$ er den tilsyneladende masse af et objekt med densitet $\rho$, mens $m$ er objektets masse.*

## 8.1 Den ideelle vægt

Vi siger at en vægt er ideel, hvis sammenhængen mellem en påført belastning og vægtens visning kan beskrives ved Ligning 8, og hvis den umiddelbart inden brug er justeret med et ideelt lod, hvis densitet $\rho_{\mathrm{R}}$ er eksakt lig med referencedensiteten[3] $\rho_0 = 8000\ \mathrm{kg/m^3}$.

Massen $m$ af et objekt med densitet $\rho$, der ved vejning på en ideel vægt ved luftdensitet $a$ giver visningen $I = w$, er derfor givet ved

*Ligning 10:*

$$m = w\left(1 + a\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right), \qquad \rho_0 = 8000\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Størrelsen $w$, som er defineret som visningen $I$ på den ideelle vægt, kalder vi for objektets *tilsyneladende masse*, da det er den masse, vi ville tillægge objektet, hvis vi ikke kendte til fænomenet luftopdrift.

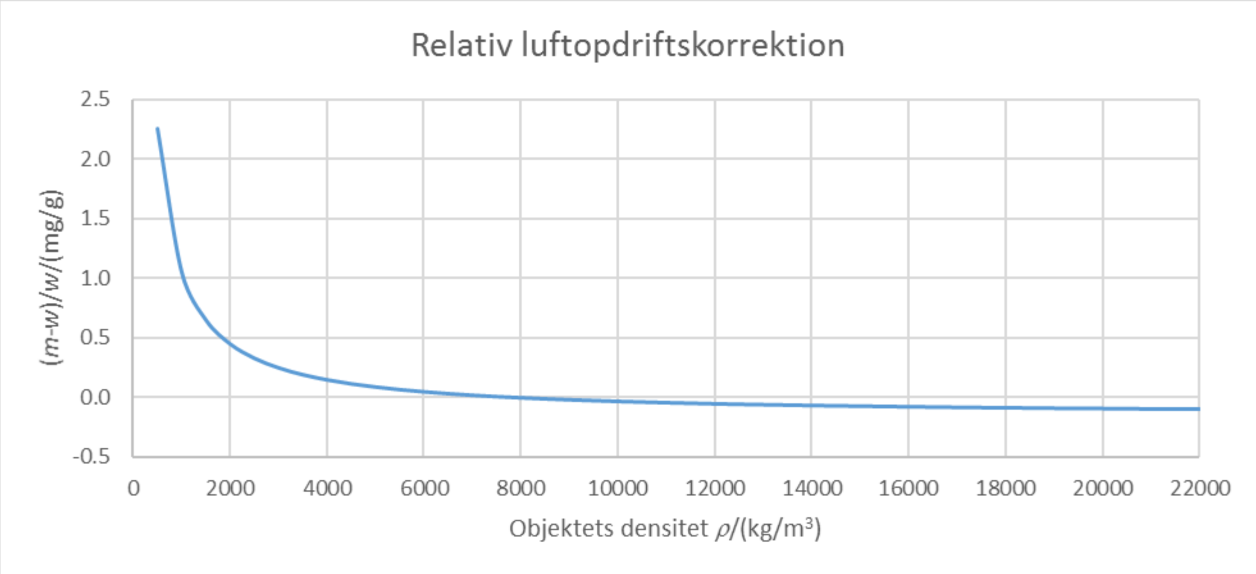
Af Ligning 10 ser vi, at den relative luftopdriftskorrektion af den tilsyneladende masse er givet ved

$$\frac{m - w}{w} = a\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

De relative luftopdriftskorrektioner angivet i Tabel 1 og Figur 4 er beregnet ud fra dette udtryk.

*Eksempel:* Ved vejning af natriumklorid med densitet $\rho = 2165\ \mathrm{kg/m^3}$ i luft med densitet $a = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$ findes den tilsyneladende masse $w = 15.000$ g. Luftopdriftskorrektionen er 0.4 mg/g af den tilsyneladende masse svarende til $15.000 \cdot 0.4\ \mathrm{mg} = 6\ \mathrm{mg}$. Massen af afvejet natriumklorid er således $m = 15.006$ g.

*Eksempel:* Ved vejning af vand med densitet $\rho = 998\ \mathrm{kg/m^3}$ i luft med densitet $a = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$ findes den tilsyneladende masse $w = 1000.0$ g. Luftopdriftskorrektionen er 1.05 mg/g af den tilsyneladende masse svarende til $1000.0 \cdot 1.05\ \mathrm{mg} = 1.05$ g. Massen af afvejet vand er således $m = 1001.1$ g.




*Figur 4. Relativ korrektion for luftopdrift ved vejning i luft med densitet $a = 1.2\ kg/m^3$ på en ideel vægt justeret med et lod med densitet $\rho_0 = 8000\ kg/m^3$. Størrelsen w er den tilsyneladende masse af et objekt med densitet ρ, mens m er objektets masse.*

## Boks 2: Hvor hyppigt skal en vægt justeres?

Vægten virker optimalt, hvis den er justeret umiddelbart inden udførelsen af en vejning, enten ved hjælp af et internt lod, eller et eksternt lod, som vægten kender massen af. Hyppigheden af justeringen skal derfor tilpasses vægtens opløsning og den nøjagtighed, man ønsker at opnå på vejningerne. På grund af variation i luftens tryk kan luftens densitet i visse tilfælde ændre sig 5 % fra om morgenen til om eftermiddagen. Antag at en vægt med kapacitet $\mathrm{Max} = 200$ g og opløsning $d = 0.01$ mg justeres om morgenen ved luftdensitet $a_\mathrm{R} = 1.23\ \mathrm{kg/m^3}$ ved hjælp af et lod med massen $m_R = 200$ g og densitet $\rho_R = 8000\ \mathrm{kg/m^3}$. Hvis loddet vejes på vægten umiddelbart efter justering vil vægten have visningen $I = 200.000\ 00$ g. Hvis samme lod vejes på vægten om eftermiddagen ved luftdensitet $a = 1.17\ \mathrm{kg/m^3}$, og vægten ikke har været justeret i mellemtiden, vil visningen ifølge Ligning 8 (med $m = m_R$ og $\rho = \rho_\mathrm{R}$) være

$$I = m_R / \left(1 + \frac{a}{\rho_\mathrm{R}} - \frac{a_\mathrm{R}}{\rho_\mathrm{R}}\right) = 200\ \mathrm{g} / \left(1 + \frac{1.17}{8000} - \frac{1.23}{8000}\right) = 199.998\ 50\ \mathrm{g}.$$

Vægten vil således have en fejl $E = -1.5$ mg ved en belastning på 200 g. Med opløsningen $d = 0.01$ mg (eller $n = \mathrm{Max}/d = 20\ 000\ 000$ delinger på vægten) svarer dette til $E = -150d$. Fejlen er altså signifikant i forhold til vægtens opløsning, men ikke nødvendigvis signifikant i forhold til den ønskede vejenøjagtighed. Hvis vægten i stedet havde opløsningen $d = 1$ mg (eller $n = \mathrm{Max}/d = 200\ 000$ delinger), ville fejlen $E = -1.5$ mg svare til $E = -1.5d$ og ville altså ikke længere være signifikant i forhold til vægtens opløsning og dermed heller ikke i forhold til den nøjagtighed, man kan forvente at kunne opnå med en sådan vægt.

**Tommelfingerregel**: Vægte med flere end $n = 200\ 000$ delinger bør justeres flere gange dagligt, f.eks. en gang i timen. Øvrige vægte bør justeres en gang om dagen, f.eks. om morgenen.

## 8.2 Fejl ved excentrisk belastning

Hvis man forskyder loddet på fjedervægten vist i Figur 3 fra centrum af vejepladen og hen mod skalaen, vil fjederen, der bærer vejepladen, bøje en smule hen mod skalaen, pointeren vil bevæge sig nedad og visningen på skalaen vil forøges proportionalt med forskydningen. Hvis loddet forskydes til den modsatte side, vil visningen reduceres tilsvarende. Hvis loddet derimod forskydes fra centrum og ud mod vejepladens kant i en retning vinkelret på linjen mellem vejepladens centrum og skalaen, vil fjederens bøjning give anledning til en forøgelse i vægtens visning uanset hvilken af de to kanter, loddet flyttes hen i mod. Forøgelsen vil være proportional med kvadratet på forskydningen, men vil dog være langt mindre (og som hovedregel være negligerbar) i forhold til forøgelsen som følge af, at loddet flyttes langs linjen mellem skalaen og vejepladens centrum.

Fejlen ved excentrisk belastning afhænger af vægtens design. I princippet kan fejlen elimineres, men i praksis lykkes det aldrig fuldstændigt. Fejlen vil være proportional med loddets masse og proportional med loddets forskydning fra centrum af vejepladen. Fejlen bestemmes ved at placere den samme belastning forskellige steder på vejepladen og notere variationen i de tilhørende visninger på vægtens display.

## 8.3 Repeterbarhedsfejl

Selvom det samme lod placeres det samme sted på vejepladen gentagne gange, vil vægten ikke nødvendigvis vise den samme værdi i sit display hver gang. Jo mere følsom en vægt er (dvs. jo større antallet af delinger på vægten er), desto større vil variationen være. Spredningen $s$ i vægtens visning bestemt ud fra $n$ gentagne belastninger med det samme lod med en given nominel masse bruges som mål for vægtens repeterbarhed:

*Ligning 11:*

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})^2, \qquad \bar{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i,$$

hvor $I_1, \dots, I_n$ er de $n$ registrerede visninger, og $\bar{I}$ er gennemsnittet af visningerne.

*Eksempel:* En vægt med kapacitet Max $=$ 205 g og opløsning $d =$ 0.1 mg belastes $n = 6$ gange med et lod med nominel masse 200 g; vægten nulstilles umiddelbart før hver belastning. Følgende visninger registreres:

$I_1 =$ 200.0014 g, $I_2 =$200.0011 g, $I_3 =$200.0013 g,

$I_4 =$200.0012 g, $I_5 =$200.0010 g og $I_6 =$200.0014 g.

Gennemsnittet af disse visninger er, vist med en ekstra decimal, $\bar{I} =$ 200.001 23 g, mens spredningen er $s =$ 0.16 mg. Denne spredning, som har $\nu = n - 1 =$ 5 frihedsgrader, er således et mål for vægtens repeterbarhed ved belastning med 200 g.

Det skal bemærkes at den målte repeterbarhed i større eller mindre udstrækning kan skyldes påvirkninger fra omgivelserne, såsom træk fra aircondition, bevægelser fra nærtstående personer og lignende. Placering af vægten på et tungt, solidt vejebord og en luftafskærmning af vejepladen kan reducere sådanne eksterne påvirkninger af vægtens visning.

## 8.4 Linearitetsfejl

Mens der for den ideelle vægt vil være en lineær sammenhæng mellem en belastning frembragt af et lod med massen $m$ og densitet $\rho$ i luft med densitet $a$ og vægtens visning $I$,

*Ligning 12:*

$$m\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) = cI,$$

vil der for en reel vægt ikke være en perfekt lineær sammenhæng mellem vægtens visning og den påførte belastning. Erfaringen viser at det kan være nødvendigt at anvende et polynomium af op til tredje orden for at beskrive sammenhængen mellem belastningen og vægtens visning:

*Ligning 13:*

$$m\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) = c_1 I + c_2 I^2 + c_3 I^3.$$

Forskellen mellem den rette linje givet ved Ligning 12 og kurven givet ved Ligning 13 betegnes som vægtens linearitetsfejl. Linearitetsfejlen afhænger af, hvordan koefficienten $c$ i Ligning 12 defineres. Hvis vi sætter

$$c = 1 - \frac{a}{\rho_{\mathrm{R}}},$$

vil linearitetsfejlen være lig med afvigelsen fra visningen for den ideelle vægt, justeret med et lod med densitet $\rho_R =$ 8000 kg/m$^3$, jævnfør Ligning 9.

# 9 Konventionel masse

Vejning af varer, der afregnes efter masse, korrigeres ifølge loven ikke for luftopdrift. Da vægtens visning afhænger af densiteten af de lodder, som man har valgt at justere vægten med, har man indført begrebet *konventionel værdi af vejning i luft* [1] [2].

## Boks 3: Hvordan bestemmes luftens densitet?

Luften på Jorden består hovedsageligt af molekylerne kvælstof ($N_2$), ilt ($O_2$), argon (Ar) og kuldioxid ($CO_2$). Sammensætningen angives som molfraktioner $x$, dvs. hvor mange molekyler, der er af en given type i forhold til det samlede antal molekyler. Som udgangspunkt regner man med at tør, ikke-forurenet luft har følgende sammensætning [4]: $x_{\mathrm{N_2}}$ = 0.780 848, $x_{\mathrm{O_2}}$ = 0.209 390, $x_{\mathrm{Ar}}$ = 0.009 332 og $x_{\mathrm{CO_2}}$ = 0.000 400. Den resterende molbrøk $x$ = 0.000 030 af luftens molekyler inkluderer neon (Ne), helium (He) metan ($CH_4$), krypton (Kr), brint ($H_2$), lattergas ($N_2O$), kulilte (CO) og xenon (Xe). Molbrøkerne for alle de specificerede molekyler er baseret på målinger af luft i øde naturområder fjernt fra menneskelige aktiviteter. Den gennemsnitlige molmasse $M_a$ af tør, ikke-forurenet luft beregnes ved at vægte molekylernes molmasse med de specificerede molbrøker: $M_a$ = 28.965 46 · $10^{-3}$ kg/mol. Selv uden menneskelig aktivitet, vil luftens sammensætning variere, dels fordi luften normalt ikke er tør, og dels fordi balancen mellem ilt og kuldioxid hele tiden ændres ved fotosyntese ($CO_2 \rightarrow O_2 + C$) og forbrænding ($C + O_2 \rightarrow CO_2$). Vandmolekylet, som for et givet tryk fortrænger et af de øvrige molekyler i luften, har molmassen $M_{\mathrm{H_2O}}$ = 18.015 28 · $10^{-3}$ kg/mol, mens kulstofatomet, som hægtes på iltmolekylet ved forbrænding, har molmassen $M_{\mathrm{C}}$ = 12.011 · $10^{-3}$ kg/mol. For en given molbrøk af vand, $x_{\mathrm{H_2O}}$ og molbrøk af kuldioxid, $x_{\mathrm{CO_2}}$ bliver den gennemsnitlige molmasse af fugtig luft lig med

$$M = \left[M_a + (x_{\mathrm{CO_2}} - 0.0004)M_{\mathrm{C}}\right]\left(1 - x_{\mathrm{H_2O}}\right) + x_{\mathrm{H_2O}}M_{\mathrm{H_2O}}.$$

Molbrøken af vand i luften beregnes ud fra forholdet mellem vandets partialtryk og luftens samlede tryk; vandets partialtryk beregnes ved hjælp af vands *damptrykskurve* enten ud fra måling af luftens *dugpunktstemperatur* eller ud fra måling af luftens temperatur og relative fugtighed. Den molære koncentration $n/V$ af molekyler per volumenenhed i luften beregnes ud fra måling af luftens tryk $p$ og termodynamiske temperatur $T$:

$$\frac{n}{V} = \frac{p}{ZRT}, \qquad R = 8.3145\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}, \qquad Z \cong 1.00\,.$$

*Kompressibilitetsfaktoren* Z er en funktion af luftens tryk, temperatur og fugtighed og beskriver luftens afvigelse fra en ideel gas, for hvilken $Z = 1$ (eksakt). Den fugtige lufts densitet a beregnes ved at multiplicere den molære koncentration $n/V$ med luftens gennemsnitlige molmasse $M$:

$$a = M\frac{p}{ZRT}\,.$$

Ved stuetemperatur $t_0$ = 20 °C, standardatmosfærisk tryk $p_0$ = 101 325 Pa, relativ fugtighed $h$ = 0.50 og kuldioxid-indhold $x_{\mathrm{CO_2}}$ = 0.000 400 har luften densiteten $a_0$ = 1.20 kg/m³. For luft med nogenlunde samme indhold af vand og $CO_2$ er luftens densitet som funktion af tryk $p$ og Celsius temperatur $t$ med god tilnærmelse givet ved:

$$a = a_0\frac{p}{p_0}\frac{(t_0 + 273.15\ \mathrm{°C})}{(t + 273.15\ \mathrm{°C})}$$

Den konventionelle værdi $m_c$ af et legeme med massen $m$ og densitet $\rho$ er defineret ud fra et hypotetisk eksperiment, hvor man på en ligearmet vægt afbalancerer legemet med lodder med densitet $\rho_0 = 8000$ kg/m$^3$. Hvis luftens densitet under afbalanceringen er $a_0 = 1.2$ kg/m$^3$ (og luftens temperatur er 20 °C), da er massen $m_c$ af lodder lig med legemets konventionelle værdi ved vejning i luft. Legemets konventionelle værdi vej vejning i luft betegnes ofte som *legemets konventionelle masse*. Sammenhængen mellem legemets masse og konventionelle værdi er givet ved:

*Ligning 14:*

$$m_c\left(1-\frac{a_0}{\rho_0}\right) = m\left(1-\frac{a_0}{\rho}\right)$$

Indførelsen af den konventionelle værdi betyder, at butiksvægte i princippet skal kalibreres med lodder, som har densiteten $\rho_0 = 8000$ kg/m$^3$. I praksis er der ikke mange lodder, der har præcis denne densitet. Rustfrit stål af forskellige typer har densiteter i området (7800 – 8100) kg/m$^3$, og kun særlige legeringer har densiteter nær 8000 kg/m$^3$. Ved langt de fleste kalibreringer af lodder rapporterer man derfor loddernes konventionelle værdi og ikke deres masse, også selvom det ikke altid fremgår eksplicit af kalibreringscertifikatet. Hvis der i certifikatet eksempelvis står, at ”loddernes masse er bestemt under antagelse af loddernes densitet er 8000 kg/m$^3$”, så er det ikke massen, men den konventionelle værdi af lodderne, som er rapporteret.

Begrebet ”konventionel masse” giver anledning til megen forvirring og mange fejlslutninger. I modsætning til massen $m$ opfylder den konventionelle masse $m_c$ **ikke** Newtons 2 lov,

$$F = ma, \text{ mens } F \neq m_c a,$$

og den konventionelle masse $m_c$ af en klump rent jern (Fe) er **ikke** lig med antal mol $n$ af Fe-atomer i klumpen ganget med molmassen $M(Fe)$ at et jernatom,

$$m = nM(\mathrm{Fe}), \text{ mens } m_c \neq nM(\mathrm{Fe}).$$

Kun hvis legemets densitet $\rho$ er eksakt lig med $\rho_0 = 8000$ kg/m$^3$ er legemets konventionelle masse $m_c$ identisk med legemets masse $m$ jævnfør Ligning 14.

# 10 Kalibrering af vægt

Kalibrering af en vægt består i at etablere en relation mellem massen $m$ af belastningen på vægten med vægtens visning $I$. Den ideelle vægt er lineær og kan derfor kalibreres med et enkelt lod, som beskrevet i afsnit 7.1, men da virkelighedens vægte altid har en linearitetsfejl af en vis størrelse, skal de kalibreres i et antal belastningspunkter, som er etableret ved anvendelse af et eller flere lodder, og som er fordelt over vægtens anvendelsesområde. Vægten bør nulstilles (med tom vejeplade) umiddelbart før hver belastning påføres. Hvis den samme belastning påføres flere gange, udregnes gennemsnit (og spredning) af visningerne for det pågældende belastningspunkt, jævnfør Ligning 11. Hvis vægten er med selvjustering, er det meget vigtigt at den aktiveres inden kalibreringen påbegyndes.

## 10.1 Referencevisning

Vi har set at vægtens visning ikke bare afhænger af massen $m$ af den tilførte belastning, men også af belastningens densitet $\rho$ og den omgivende lufts densitet $a$. Alligevel er de fleste kalibreringslaboratorier ikke særlig omhyggelige med at definere vægtens referencevisning, dvs. hvad vægten skal vise for at vise rigtigt. Ved legal verifikation af vægte defineres vægtens referencevisning simpelthen som den konventionelle værdi af belastningen. Heri ligger den præmis, at luftens densitet ved jordens overflade er ’tæt på’ referencedensiteten $a_0 = 1.2$ kg/m$^3$ og at belastningen etableres med lodder, hvis densitet er ’tilstrækkelig tæt på’ $\rho_0 = 8000$ kg/m$^3$. Hvis man (f.eks. i forbindelse med en usikkerhedsberegning på et vejeresultat), vil have kontrol over de effekter, der påvirker resultatet af en vejning, er man nødt til at have en mere præcis definition af vægtens referencevisning. Vi definerer derfor vægtens referencevisning $I_R$ som den visning, vægten ville have haft, havde den været ideel, jævnfør afsnit 7.1, og justeret som beskrevet i afsnit 7.2 med et lod med densitet $\rho_0 = 8000$ kg/m$^3$ ved luftdensiteten $a_R$. Der gælder da, jævnfør Ligning 8:

$$m = I_R\left(1+\frac{a}{\rho}-\frac{a_R}{\rho_0}\right).$$

Løses denne ligning med hensyn til referencevisningen under anvendelse af tilnærmelsen $1/(1+\delta) \cong 1-\delta$, fås:

$$I_R = m\left(1-\frac{a}{\rho}+\frac{a_R}{\rho_0}\right).$$

Af Ligning 14 fås under en tilsvarende tilnærmelse:

$$m = m_c\left(1 - \frac{a_0}{\rho_0} + \frac{a_0}{\rho}\right).$$

Referencevisningen $I_R$ udtrykt ved belastningens konventionelle værdi $m_c$ er derfor under tilnærmelsen $(1+\delta_1)(1+\delta_2) \cong 1+\delta_1+\delta_2$ givet ved:

*Ligning 15:*

$$I_R = m_c\left(1 - \frac{a}{\rho} + \frac{a_R}{\rho_0} - \frac{a_0}{\rho_0} + \frac{a_0}{\rho}\right).$$

Hvis vægten har en selvjustering (se afsnit 7.2) skal denne altid aktiveres inden kalibreringen af vægten påbegyndes; det medfører at luftens densitet under justeringen af vægten, $a_R$, er den samme som luftens densitet under kalibreringen, $a$. Referencevisningen for vægte **med selvjustering** er derfor givet ved:

*Ligning 16:*

$$I_R = m_c\left(1 - (a - a_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right).$$

For vægte uden selvjustering vil den ideelle situation være, at luftdensiteten under justeringen af vægten, $a_R$, var lig med luftens referencedensitet, $a_0$. Referencevisningen for vægte **uden selvjustering** er derfor givet ved:

*Ligning 17:*

$$I_R = m_c\left(1 - (a - a_0)\frac{1}{\rho}\right).$$

Det skal bemærkes, at for vægte **med selvjustering** er referencevisningen kun lig med belastningens konventionelle værdi $m_c$, hvis enten belastningens densitet $\rho$ er lig med referencedensiteten $\rho_0 = 8000\ \text{kg/m}^3$, eller hvis luftens densitet under kalibreringen, $a$, er lig med referencedensiteten $a_0 = 1.2\ \text{kg/m}^3$. For vægte **uden selvjustering** er vægtens referencevisning kun lig med belastningens konventionelle værdi $m_c$, hvis luftens densitet under kalibreringen, $a$, er lig med referencedensiteten $a_0 = 1.2\ \text{kg/m}^3$.

## 10.2 Kalibreringsresultat

Resultatet af en kalibrering af en vægt kan rapporteres på forskellig vis. Oftest rapporteres en tabel over vægtens *visningsfejl* $E$ fundet i de etablerede kalibreringspunkter sammen med den ekspanderede usikkerhed på visningsfejlen, $U = 2u(E)$ . Principielt bør visningsfejlen være defineret ved:

*Ligning 18:*

$$E = I - I_R,$$

hvor $I$ er vægtens (gennemsnits)visning henholdsvis referencevisningen $I_R$ defineret i afsnit 10.1, når vægten belastes med lodder med konventionel masse $m_c$ i luft med densitet $a$. I praksis udregnes visningsfejlen ofte ved udtrykket

$$E = I - m_c,$$

hvilket er tilladeligt, hvis standardusikkerheden på visningsfejlen, $u(E)$, inkluderer et bidrag fra en indflydelse af luftens opdrift, som der ikke er korrigeret for.

Ved kalibrering af vægte på DFM, tilpasses koefficienterne $f$, $A$ og $B$ i en kalibreringskurve

*Ligning 19:*

$$I_R = f(I + AI^2 + BI^3),$$

til et antal sammenhørende værdier af visning *I* og referencevisning $I_R$ beregnet ud fra Ligning 16. Dette tillader korrektion (med en vis usikkerhed) for vægtens visningsfejl ved en vilkårlig visning i vægtens vejeområde. Tilpasningen udføres ved en mindste kvadraters metode udviklet på DFM [3]. Ved metoden bestemmes tillige standardusikkerhederne på de tilpassede koefficienter samt de tilhørende korrelationskoefficienter, således at standardusikkerheden $u(I_R)$ kan beregnes som funktion af vægtens visning *I*. Hvis man anvender en kalibreringskurve til at korrigere for en vægts visningsfejl, skal man være opmærksom på, om kurven ændrer sig signifikant fra den ene kalibrering til den næste. Hvis ændringen er signifikant, skal der adderes et usikkerhedsbidrag til $u(I_R)$, som beskriver den forventet mulige ændring frem til næste kalibrering.

Resultatet af en kalibrering håndteres normalt på en langt simplere måde. Den simpleste måde er at kontrollere, om de fundne visningsfejl $E$ plus/minus den ekspanderede usikkerhed $U = 2u(E)$ alle ligger inden for en på forhånd fastsat tolerance $t$, dvs. om kriteriet $-t + U \leq E \leq t - U$ er opfyldt. Tolerancen $t$, som eventuelt kan være en funktion af vægtens visning $I$, skal afspejle den usikkerhed, som kan tolereres på massebestemmelserne udført med vægten.

*Eksempel:* En analysevægt Sarorius BP221S med kapacitet $\text{Max} = 220$ g og opløsning $d = 0.1$ mg kalibreres i punkterne 25 g, 50 g, 75 g, 100 g, 125 g, 150 g, 175 g og 200 g. En detaljeret beskrivelse af kalibreringen og den efterfølgende analyse er beskrevet i ref. [3]. Belastningerne etableres med minimum 2 forskellige kombinationer af fire ikke-kalibrerede diske med de nominelle masser 25 g, 25 g, 50 g og 100 g. Belastningen 200 g etableres tillige med et kalibreret referencelod med nominel masse 200 g. Kalibreringkurven for vægten antages at kunne beskrives ved den parabolske funktion

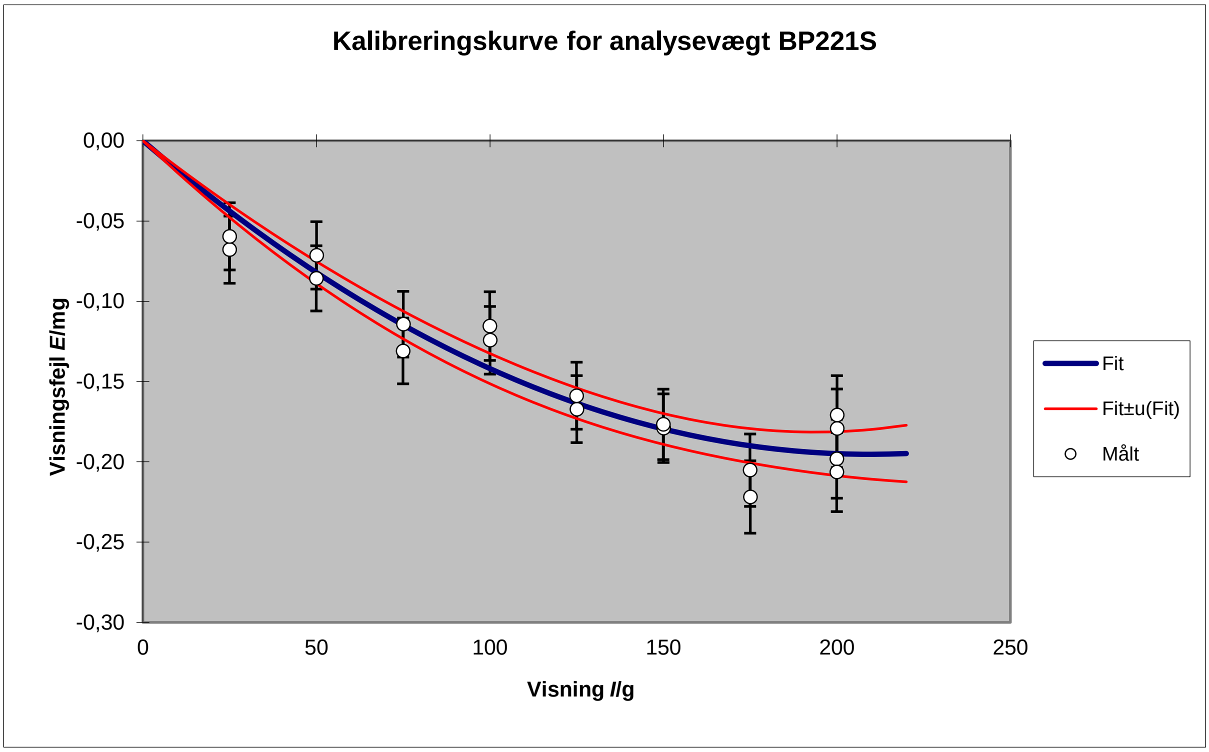
$$I_\mathrm{R} = f(I + AI^2).$$

Analysevægten har et internt lod med nominel masse 200 g, som anvendes til selvjustering. Referencevisningerne hørende til de etablerede belastninger er derfor givet ved Ligning 16 (de fire diske er skåret af samme stang og har derfor samme densitet). Luftens densitet $a$ måles før og efter kalibreringen, og gennemsnittet anvendes til beregningen af referencevisningerne $I_\mathrm{R}$ hørende til de konventionelle masser $m_\mathrm{c}$ af de etablerede belastninger. Konstanterne $f$ og $A$, såvel som de konventionelle masser af de fire diske, $m_{\mathrm{c}1}, \dots, m_{\mathrm{c}4}$, bestemmes ved mindste kvadraters metode ud fra vægtens visninger og den kendte, konventionelle masse af 200 g referenceloddet, $m_{\mathrm{cR}}$. Resultatet af kalibreringen er vist i Figur 5. Den fittede (blå) kurve kan i princippet bruges til at korrigere vægtens visningsfejl for enhver visning $I$ i vægtens vejeområde, og det med en standardusikkerhed, som er mindre end vægtens opløsning. Hvis man vil undgå dette besvær, kan man i stedet fastsætte en tolerance $t = 0.3$ mg for analysevægtens visningsfejl; denne tolerance er i hvert fald opfyldt ved kalibreringen vist i Figur 5. Det skal bemærkes, at vægten har et indbygget lod med nominel masse 200 g. Da visningsfejlen ved 200 g er $E = -0.2$ mg, tyder det på, at den konventionelle masse af det indbyggede lod er 0.2 mg højere end den i vægten specificerede værdi, som anvendes ved selvjusteringen.

## 11 Usikkerhed på vejning

Bestemmelse af et objekts masse $m$ ved vejning kan opdeles i to trin, der hver især bidrager til usikkerheden på massebestemmelsen.

I første trin er selve vejeprocessen, hvor målet er at bestemme objektets tilsyneladende masse $w$, dvs. den visning vægten ville have, hvis den var ideel og




*Figur 5: Kalibreringskurve for en analysevægt. Standardusikkerheden på de målte visningsfejl er angivet ved error bars. Standardusikkerheden på den fittede kurve (blå) er angivet ved de røde linier. Det bemærkes at alle visningsfejl med sikkerhed ligger i intervallet* (0 ± 0.3) mg, usikkerheden på visningsfejlen taget i betragtning.

umiddelbart inden brug var justeret med et lod med densiteten $\rho_0 = 8000\ \mathrm{kg/m^3}$, jævnfør afsnit 8.1.

Under antagelse af at den anvendte vægt har en selvjustering, som aktiveres umiddelbart før vejningen påbegyndes, og at vægten tillige nulstilles umiddelbart inden et objekt lægges på vejepladen, kan man anvende følgende model til bestemmelse af den tilsyneladende masse $w$ ud fra vægtens visning $I$:

*Ligning 20:*

$$w = I + \delta I_\mathrm{d} + \delta I_\mathrm{c},$$

hvor $I$ er vægtens visning, $\delta I_\mathrm{d}$ er en korrektion for afrundingsfejl i vægtens display, $\delta I_\mathrm{c}$ er korrektion for vægtens visningsfejl fundet ved kalibrering.

Det bedste estimat af vægtens visning er naturligvis den aflæste talværdi, og den tilhørende standardusikkerhed er $u(I) = s$, hvor $s$ er vægtens repeterbarhed i den relevante del af vægtens vejeområde.

For et display med opløsning $d$, vil afrundingsfejlen på en visning være *rektangulært* fordelt i intervallet $[-d/2\,; d/2[$. Da både visningen efter nulstillingen af vægten (nulvisningen) og visningen efter belastning med vejeobjektet, $I$, er behæftet med afrundingsfejl, er den samlede korrektion $\delta I_\mathrm{d}$ for afrundingsfejl *triangulært* fordelt i intervallet $[-d; d[$. Det bedste estimat er derfor $\delta I_\mathrm{d} = 0$ med tilhørende standardusikkerhed $u(\delta I_\mathrm{d}) = d/\sqrt{6}$.

Hvis man ud fra de seneste kalibreringer af vægten blot har registreret, at visningsfejlen $E$ i den relevante del af vægtens vejeområde ligger i intervallet $[-t; t]$, hvor $t$ er en fastsat tolerance, kan man antage, at korrektionen $\delta I_\mathrm{c}$ for visningsfejlen er rektangulært fordelt i samme interval. Det bedste estimat af korrektionen er da $\delta I_\mathrm{c} = 0$ med standardusikkerhed $u(\delta I_\mathrm{c}) = t/\sqrt{3}$.

Standardusikkerheden på den tilsyneladende masse $w$ er herefter givet ved:

*Ligning 21:*

$$u^2(w) = u^2(I) + u^2(\delta I_\mathrm{d}) + u^2(\delta I_\mathrm{c}) = s^2 + \frac{d^2}{6} + \frac{t^2}{3}.$$

*Eksempel:* Natriumklorid (NaCl) afvejes på en vægt med kapacitet $\mathrm{Max} = 205$ g og opløsning $d = 0.1$ mg. Vægtens repeterbarhed, bestemt ved gentagen belastning med 200 g, er $s = 0.16$ mg. Seneste kalibrering viser, at vægtens visningsfejl overholder tolerancen $t = 0.3$ mg i hele vejeområdet. Før vejning aktiveres vægtens selvjustering. En tom vejebåd foldet i papir lægges på vægten, hvorefter vægten nulstilles. Natriumklorid fyldes ganske langsomt i vejebåden, indtil vægtens visning er så tæt på 50 g, som muligt. Vægtens stabile visning noteres: $I = 50.0123$ g. Den tilsyneladende masse af den afvejede mængde natriumklorid er således $w = 50.01230$ g, jævnfør Ligning 20. Vægtens repeterbarhed ved 50 g forventes at være mindre end eller lig med repeterbarheden ved 200 g. Usikkerheden på vægtens visning sættes derfor til $u(I) = s = 0.16$ mg. Standardusikkerheden på korrektionen for afrundingsfejl er $u(\delta I_\mathrm{d}) = d/\sqrt{6} = 0.041$ mg, mens standardusikkerheden for korrektion for vægtens visningsfejl er $u(\delta I_\mathrm{c}) = t/\sqrt{3} = 0.17$ mg. Standardusikkerheden på den tilsyneladende masse af afvejet natriumklorid er således $u(w) = 0.24$ mg, jævnfør Ligning 21.

I andet trin af massebestemmelsen omregnes den tilsyneladende masse $w$ til den fysiske masse $m$ ved hjælp af Ligning 10, som for overblikkets skyld er gentaget her:

$$m = w\left(1 + a\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right), \qquad \rho_0 = 8000\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Den tilhørende standardusikkerhed $u(m)$ er givet ved:

*Ligning 22:*

$$u^2(m) = \left(\frac{m}{w}\right)^2 u^2(w) + w^2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2 u^2(a) + \left(\frac{wa}{\rho^2}\right)^2 u^2(\rho).$$

Det bedste estimat af objektets densitet $\rho$ og tilhørende standardusikkerhed $u(\rho)$ må fastlægges ud fra kendskabet til, hvilket materiale(r) objektet består af. Er materialets kemiske sammensætning kendt, kan densiteten ofte slås op i en tabel og antallet af betydende cifre angivet i tabellen kan bruges til at vurdere usikkerheden på tabelværdien. For mindre veldefinerede materialer kan man ofte finde varierende tabelværdier. Ud fra de tilgængelige informationer kan man vælge et interval $[\rho_{\min}; \rho_{\max}]$, som vejeobjektets densitet $\rho$ med meget stor sandsynlighed ligger i. Antages $\rho$ at være rektangulært fordelt i intervallet $[\rho_{\min}; \rho_{\max}]$, er det bedste estimat og tilhørende standardusikkerhed af objektets densitet herefter givet ved:

$$\rho = \frac{\rho_{\min} + \rho_{\max}}{2}, \qquad u^2(\rho) = \frac{(\rho_{\max} - \rho_{\min})^2}{12}.$$

Luftens densitet bestemmes ud fra måling eller en vurdering af luftens tryk, temperatur, vand- og $CO_2$-indhold som beskrevet i Boks 3.

*Eksempel:* En søgning på Internettet efter densiteten af natriumklorid (NaCl) gav resultaterne 2.16 g/cm$^3$, 2.17 g/cm$^3$ og 2165 kg/m$^3$. Densiteten af NaCl kan derfor sættes til $\rho = 2165.0$ kg/m$^3$ med standardusikkerhed $u(\rho) = 5/\sqrt{3}$ kg/m$^3$ = 2.9 kg/m$^3$.

Under afvejningen af NaCl måles luftens temperatur til at være $t = 23$ °C med standardusikkerhed $u(t) =$ 1°C, mens luftens tryk måles til være $p = 1003$ hPa med standardusikkerhed $u(p) = 2$ hPa. Luftens relative fugtighed $h$ måles ikke og antages derfor at være rektangulært fordelt i intervallet $[0; 1]$. Det bedste estimat er derfor $h = 0.50$ med standardusikkerhed $u(h) = 0.5/\sqrt{3} = 0.29$. Luftens CO2-indhold $x_{CO_2}$ måles heller ikke; hvis vejningen foregår i et rimeligt ventileret rum, kan $x_{CO_2}$ antages at være rektangulært fordelt i intervallet $[0.0004; 0.0010]$. Det bedste estimat er således $x_{CO_2} = 0.000\,70$ med standardusikkerhed $u(x_{CO_2}) = 0.0003/\sqrt{3}$ = 0.00017. Ved brug af formlerne givet i Boks 3 beregnes luftens densitet under vejningen til at være $a$ =1.174 kg/m$^3$ med standardusikkerhed $u(a)$ =0.006 kg/m$^3$.

Massen af den afvejede mængde NaCl beregnes ved brug af Ligning 10:

$$m = 50.012\,30 \text{ g}\left(1 + 1.174\left(\frac{1}{2165} - \frac{1}{8000}\right)\right)$$
$$= 50.032\,08 \text{ g}.$$

Den tilhørende standardusikkerhed $u(m)$ =0.26 mg beregnes ud fra Ligning 22 og er sammensat af følgende usikkerhedsbidrag:

$$\frac{m}{w}u(w) = 0.24 \text{ mg},$$

$$w\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)u(a) = 0.10 \text{ mg},$$

$$\frac{wa}{\rho^2}(\rho) = 0.04 \text{ mg}.$$

Det bemærkes at usikkerhedsbidraget fra selve vejeprocessen (bestemmelsen af $w$) er dominerende i det konkrete tilfælde, hvor luftens tryk og temperatur er målt med en rimelig usikkerhed, og hvor emnets densitet er kendt med en lille usikkerhed. Hvis man i stedet for at måle tryk og temperatur antager, at lufttrykket i Danmark er normalfordelt med middelværdi $p = 1010$ hPa og spredning $u(a) = 20$ hPa, mens temperaturen i laboratoriet, hvor vejningen udføres, antages at være rektangulært fordelt i intervallet (23 ± 5) °C, da beregnes luftens densitet til at være $a = 1.182$ kg/m$^3$ med standardusikkerhed $u(a) =$ 0.027 kg/m$^3$. Massen af afvejet NaCl er da $m = 50.032\,22$ g med tilhørende standardusikkerhed $u(m) = 0.52$ mg, og det er nu usikkerhedsbidraget fra bestemmelsen af luftens densitet $a$, som er dominerende.

# 12 Litteraturliste


[1] OIML D 28, "Conventional value of the result of weighing in air," 2004.

[2] OIML R111-1:2004, »Weights of classes E1, E2, F1, F2, M1, M1-2, M2, M2-3 and M3«.

[3] L. Nielsen, "Evaluation of measurements by the method of least squares," in *Algorithms for Approximation IV*, 2002.

[4] A. Picard, R. Davis, M. Gläser and K. Fuki, "Revised formula for the density of moist air (CIPM-2007)," *Metrologia,* vol. 45, pp. 149-155, 2008.

# Anneks 1 VBA-kode

VBA-kode til beregning af luftens densitet $a/(\mathrm{kg/m^3})$ som funktion af luftens tryk $p/\mathrm{Pa}$, temperatur $t/°\mathrm{C}$, fugtighed udtrykt ved enten dugpunktstemperatur $t_\mathrm{d}/°\mathrm{C}$ (IsDewpoint = True) eller relativ fugtighed $r/1$ (IsDewpoint = False) og molbrøken $x_{\mathrm{CO2}}/1$:

```
Option Explicit
'Reference: A Picard et al, Revised formula for the density of moist _
'air (CIPM-2007), Metrologia, 2008, 45, 149-155.

Function AirDens(Pressure As Double, Temperature As Double, Humidity As Double, _
  IsDewpoint As Boolean, x_CO2 As Double) As Double

  'Vapour pressure at saturation p_sv
  Const A As Double = 0.000012378847
  Const B As Double = -0.019121316
  Const C As Double = 33.93711047
  Const D_ As Double = -6343.1645

  'Enhancement factor f
  Const alfa As Double = 1.00062
  Const beta As Double = 0.0000000314
  Const gamma As Double = 0.00000056

  'Compressibility factor Z
  Const a0 As Double = 0.00000158123
  Const a1 As Double = -0.000000029331
  Const a2 As Double = 0.00000000011043
  Const b0 As Double = 0.000005707
  Const b1 As Double = -0.00000002051
  Const c0 As Double = 0.00019898
  Const c1 As Double = -0.000002376
  Const d As Double = 0.0000000000183
  Const e As Double = -0.00000000765

  'Gas constant R in J/(mol K)
  Const R As Double = 8.314472

  'Molar mass of dry air at x_CO2 = 0.0004
  Const Ma0 As Double = 0.02896546

  'molar mass of water
  Const Mv As Double = 0.01801528

  'Variables used
  Dim p As Double
```

```
    Dim t_ As Double
    Dim tr_ As Double
    Dim T As Double
    Dim Tr As Double
    Dim psv As Double
    Dim Ma As Double
    Dim f As Double
    Dim Z As Double
    Dim xv As Double

    'Molar mass of dry air in kg/mol
    Ma = Ma0 + 0.012011 * (x_CO2 - 0.0004)

    'Temperature in oC
    t_ = Temperature

    'Temperature in K
    T = t_ + 273.15

    'Pressure in Pa
    p = Pressure

    'Mole fraction of water vapour, xv
    If IsDewpoint Then 'Humidity is expressed in terms of dewpoint
        tr_ = Humidity 'Dewpoint in C
        Tr = tr_ + 273.15 'Dewpoint in K
        psv = Exp(A * Tr ^ 2 + B * Tr + C + D_ / Tr) 'Vapour pressure at dewpoint in Pa
        f = alfa + beta * p + gamma * tr_ ^ 2 'Enhancement factor
        xv = f * psv / p
    Else 'Humidity is expressed in terms of relative humidity
        psv = Exp(A * T ^ 2 + B * T + C + D_ / T) 'Vapour pressure in pa
        f = alfa + beta * p + gamma * t_ ^ 2 'Enhancement factor
        xv = Humidity * f * psv / p
    End If

    'Compressibility factor
    Z = 1 - (p / T) * (a0 + a1 * t_ + a2 * t_ ^ 2 + (b0 + b1 * t_) * xv _
        + (c0 + c1 * t_) * xv ^ 2) + (p / T) ^ 2 * (d + e * xv ^ 2)

    'Air density
    AirDens = (p * Ma) / (Z * R * T) * (1 - xv * (1 - Mv / Ma))

End Function
```